SIGNAL PROCESSING

(TRAITEMENT DU SIGNAL)

CHAPITRE I
Introduction au Traitement du Signal

(Rappels de cours et exercices corrigés)

By
Djeddi Mabrouk

Boumerdès, 6 /2023

PREAMBULE

Cette partie du cours de traitement du signal est issue d'un enseignement de plusieurs décennies que j'ai professé au sein de la licence et du master en géophysique, électronique et télécommunications à la Faculté des Hydrocarbures et de la chimie (Boumerdès), USTHB (Alger), UMMTO (Tizi-Ouzou), ENSTP (Kouba - Alger), ENS Informatique (Oued – Smar , Alger) en bien d'autres établissements universitaires nationaux .

Le cours s'adresse non seulement à mes étudiants mais aussi à tous ceux qui désirent s'initier aux techniques de base de traitement du signal. Il peut aussi intéresser des spécialistes de traitement du signal qui souhaitent avoir un point de vue mathématique sur les outils qu'ils utilisent fréquemment.

J'ai souhaité donner comme tout cours qui se respecte quelques exercices .J'ai choisi de n'aborder que des signaux déterministes unidimensionnels .

Cette partie se veut donc une introduction à la discipline plus qu'un cours destiné à des spécialistes du domaine. Elle permet d'acquérir les éléments de base et les outils mathématiques du traitement du signal. Elle doit être donc vue comme un complément d'information au cours .Elle contient sans doute des erreurs, merci de bien vouloir me les communiquer.

Ce produit pédagogique est ma propriété exclusive , il est strictement interdit de le reproduire à des fins commerciales .Seul le téléchargement ou impression pour un usage personnel (une copie par utilisateur) est permis.

Toutes vos remarques, vos commentaires, vos critiques, et même vos encouragements, seront accueillis au : djeddimabrouk@yahoo.com

TO CITE THIS VERSION (pour citer cette version)

Djeddi Mabrouk .Cours de traitement du signal. Département génie parasismique et phénomènes aléatoires, FHC –Université M'Hamed Bougara de Boumerdès. Algérie 06/2023 - 6/77

INTRODUCTION

Définition d'un signal analogique

Physiquement un signal est une entité qui représente d'une information (donc une énergie) à transmettre .Un signal réel correspond à la mesure d'une grandeur physique (signal sismique, intensité de courant électrique etc.).

Il existe deux types de signaux :

Les signaux analogiques : Le signal est dit analogique s'il est une fonction mathématique continue traduisant l'évolution d'une grandeur physique. L'évolution de cette grandeur peut s'opérer en fonction du temps t ou en fonction de l'espace X.

Les signaux logiques (appelés également signaux binaires) : Ce sont des signaux discontinus dont l'amplitude de la grandeur porteuse de l'information ne peut prendre que deux valeurs tout ou rien (fig.1). Les signaux numériques sont aussi des signaux logiques mais qui représentent des valeurs numériques.

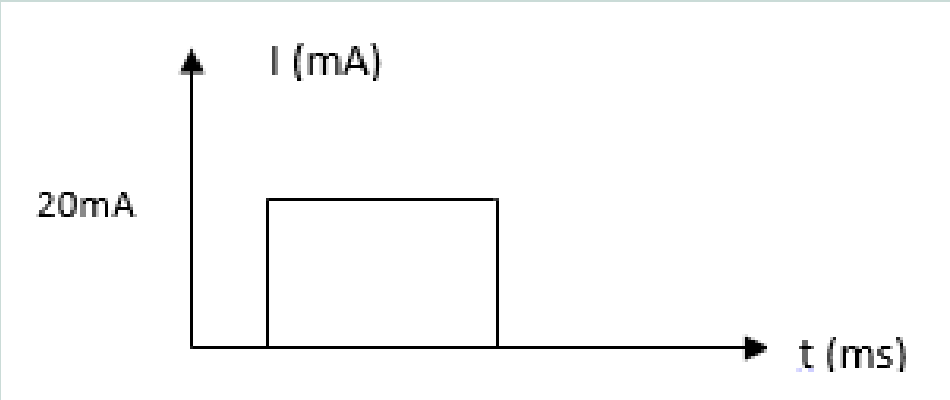


Fig. 1 : Exemple de signal logique

Tout signal réel possède les caractéristiques suivantes :_

- Il évolue de façon continue dans le temps
- Il possède une amplitude bornée
- Il est à support borné (existence de durée finie)
- Il est causal (nul pour tous les instants négatifs)
- Il est à énergie finie (signal physiquement réalisable)

Le support d'un signal

Le support d'un signal analogique réel est l'intervalle sur lequel est définie la variable dont dépend le signal étudié. Cette variable est couramment associée à un temps t lorsqu'il s'agit de signaux à une dimension et on écrit $S(t)$ (fig. 2)

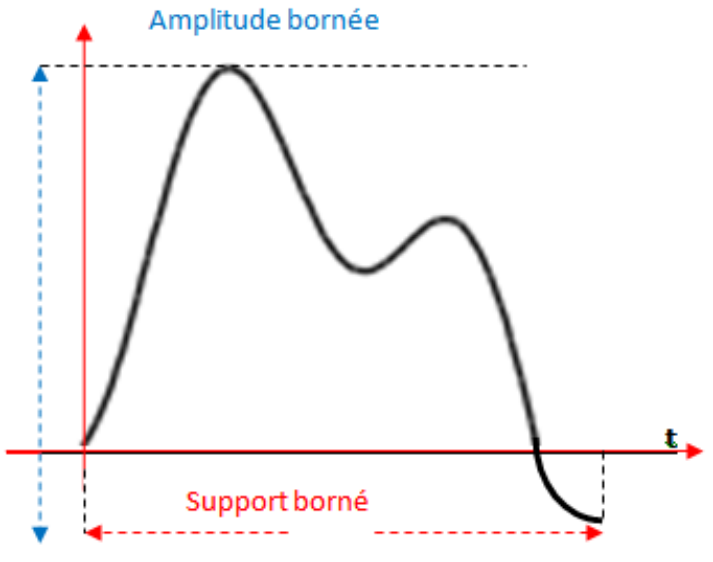


Fig.2 : Représentation d'un signal physique réel

Opérations sur les signaux analogiques

Les signaux peuvent être assimilés à des fonctions, on peut leur faire subir des opérations élémentaires telles que, la somme, le produit, le décalage temporel, l'inversion temporelle (réflexion), le changement d'échelle etc.

1- Produit d'un signal par un scalaire

Considérons un signal $S(t)$, on a dans le cas de sa multiplication (amplitudes) par 2 et 0.5 : (fig.3)

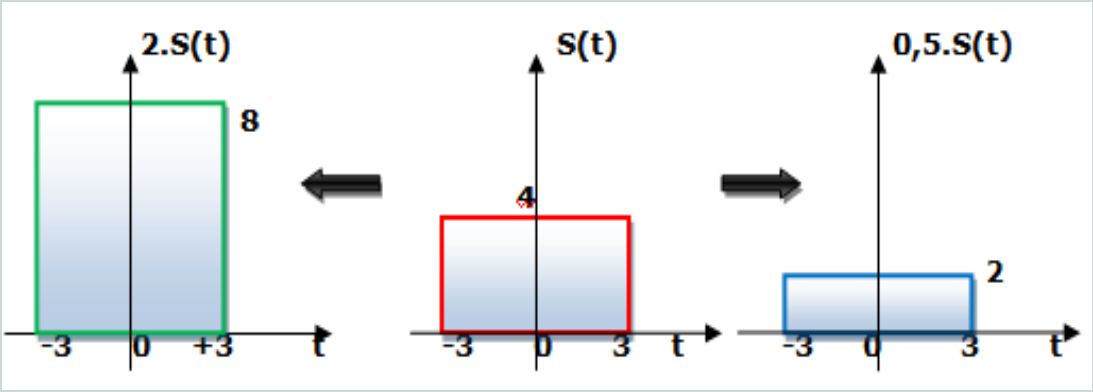


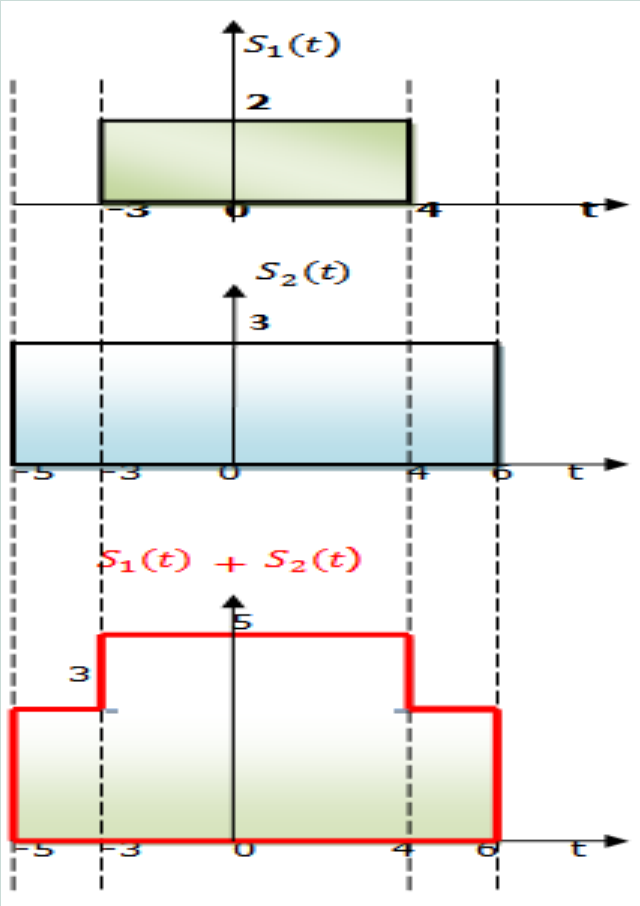
Fig.3 multiplication d'un signal par un scalaire

2- Produit de deux signaux

le produit de deux signaux correspond au produit , pour tout instant t des valeurs (des amplitudes) prises par ces deux signaux pour ce même instant t.

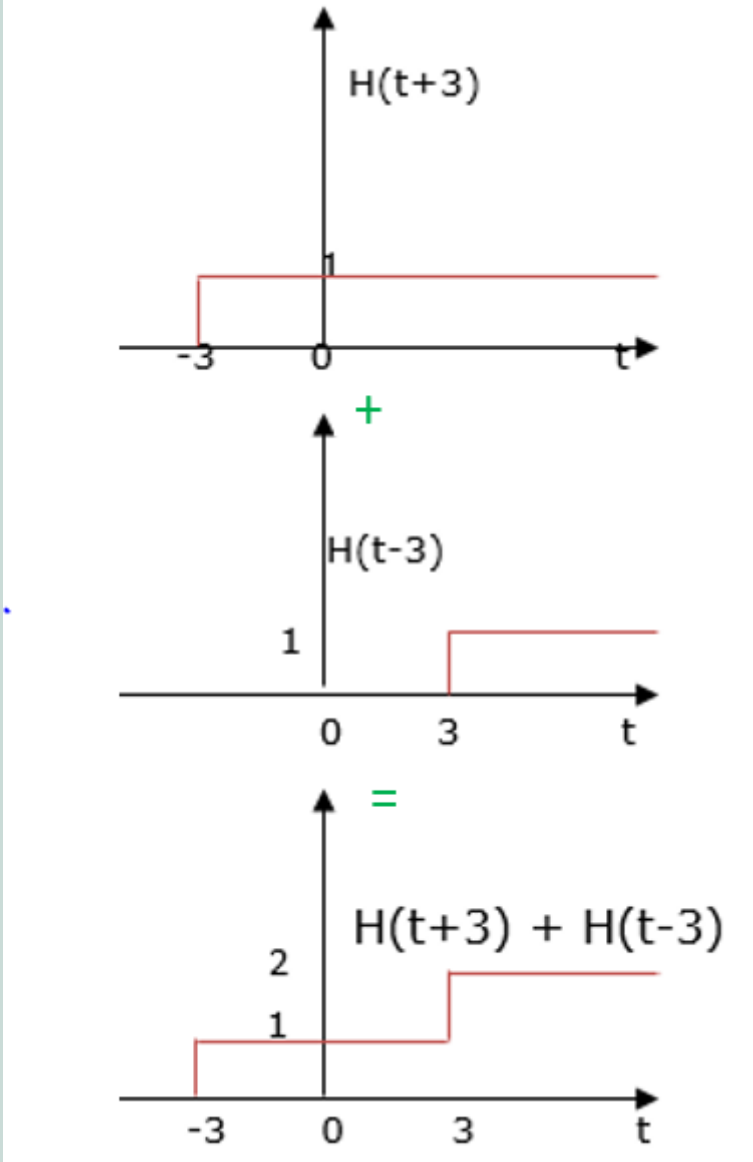
3-Addition des signaux

L'addition (des amplitudes) de deux signaux S_1(t) et S_2 (t) est : (fig.4 a, b) :



(a)

$-5 < t < -3$	$= S_1(t) + S_2(t)$	$= 0 + 3 = 3$
$-3 \leq t \leq 4$	$= S_2(t) + S_1(t)$	$= 2 + 3 = 5$
$4 < t \leq 6$	$= S_2(t) + S_1(t)$	$= 0 + 3 = 3$
$t > 0$	$S_2(t) + S_1(t)$	$= 0$

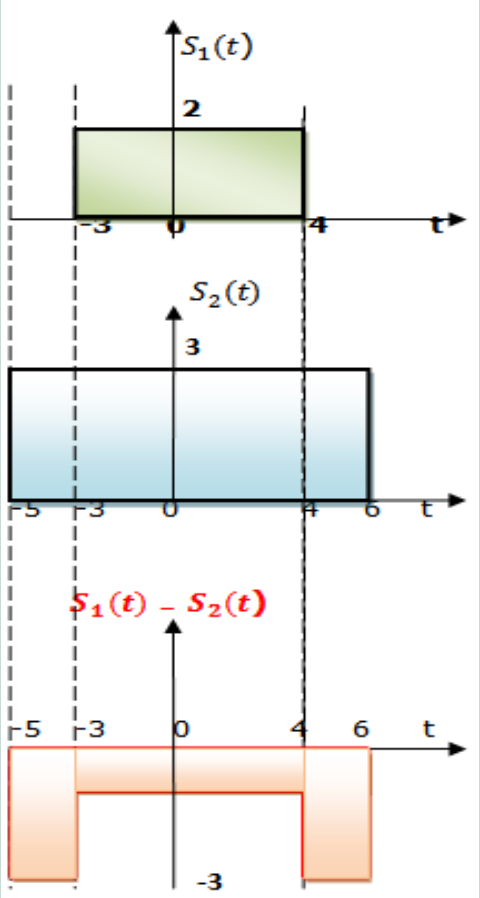


(b)

Fig. :4a, b : Addition des signaux

4 -Soustraction de deux signaux

La soustraction de deux signaux $S_1(t)$ et $S_2(t)$ est (fig.5a, b) :

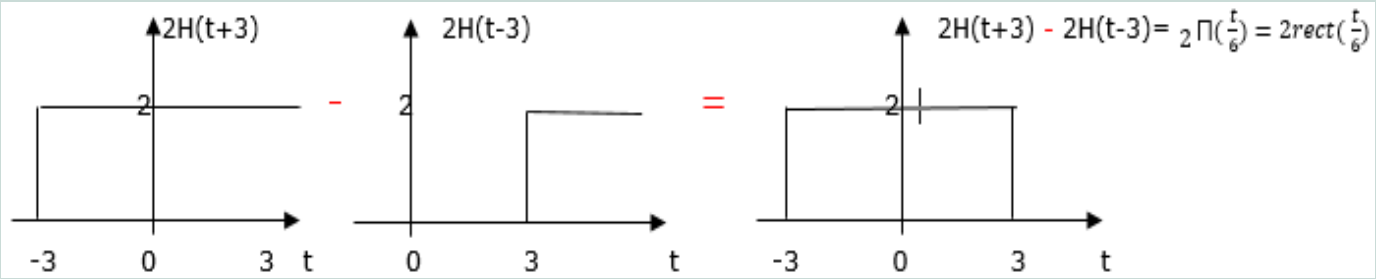


(a)

$-5 \leq t < -3$, $S_1(t) - S_2(t)$ = **0 - 3 = -3**

$-3 \leq t \leq 4$, $S_1(t) - S_2(t)$ = **2 - 3 = - 1**

$4 < t \leq 6$, $S_1(t) - S_2(t)$ = **0 - 3 = -3**



(b)

Fig. 5a, b : soustraction de deux signaux

Le signal résultant étant un signal rectangulaire d'amplitude 2, centré à l'origine et de durée 6.

$H(t)$: Étant la fonction de Heaviside (échelon unité)

Devoir

Exercice n°1 –Soient $S_1(t)$ et $S_2(t)$ deux signaux périodiques.

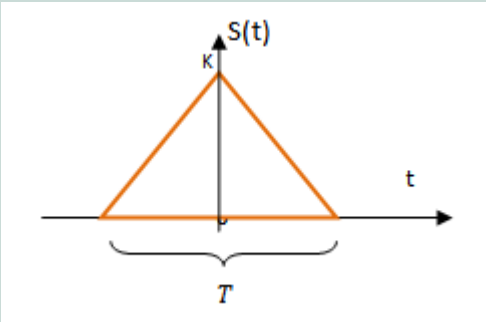
$S_1(t) = 2\cos\frac{2\pi t}{3} + 4\sin\frac{8\pi t}{3}$ et $S_2(t) = \sin \pi t$

Calculer le période de chacun d'eux
Quelle est la condition pour que le signal $Z(t) = S_1(t) + S_2(t)$ soit- il périodique
Déterminer la période de $Z(t)$

Exercice n° 2 – Tracer le graphe du signal suivant :

$S(t) = H(t-2) + H(2-t)$

Exercice n° 3 – Soit un signal $s(t)$ représenté par la figure ci-dessous :



– Donnez l'expression du signal $s(t)$.
–Quelle est la valeur que prendra k pour que l'aire du signal soit égale à l'unité (1)
– Soit $a \neq 0$, tracer le graphe de $S(a.t)$ pour $|a| < 1$ et pour $|a| > 1$
– Faites une comparaison (commentaire) entre le graphe de $S(t)$ et les graphes de $S(a.t)$

Exercice n° 4 –Représenter graphiquement les signaux suivants :

$S(t) = 5\,\Pi\left(\frac{t-6}{4}\right) = 5\,\Pi_4(t-6)$ Signal porte d'amplitude 5 et de durée 4
$S(t) = r(t+2)$ Signal rampe
$S(t) = H(t) - H(t-4)$ Signal Heaviside

Exercice n° 5 –On considère le signal triangulaire $S(t)$

$$S(t) = \begin{cases} 1+t & \text{pour} \quad -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \text{ ailleurs} & \end{cases}$$

-Représenter le graphe de $S(t)$.

Devoir

– Représenter graphiquement les transformations suivantes des signaux suivants :

$\boldsymbol{S(2t)}$

$\boldsymbol{S(-t)}$

$\boldsymbol{S(2t-3)}$

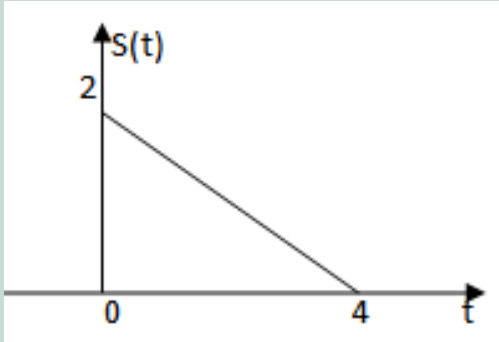
$\boldsymbol{S(4t+3)}$

$\boldsymbol{S(4-2t)}$

$\boldsymbol{S(-4t+2)}$

$\boldsymbol{S(2t)+S(2t-3)}$

–On considère le signal de la figure ci-dessous .Donner son expression mathématique.



Intégration par partie

L'intégration par partie est une méthode qui permet de transformer l'intégrale d'un produit de fonctions en d'autres intégrales. Elle permet de simplifier les calculs.
Soient deux signaux $S_1(t)$ et $S_2(t)$ continues et dérivables , a et b deux réels de leur intervalle de définition , on a :

$$\int_a^b S_1(t)\,[S_2(t)]'dt = [S_1(t)\,.S_2(t)]_a^b - \int_a^b S_2(t)\,[S_1(t)]'dt$$

Soit :

$$\int u\ dv = u\,v - \int v\ du$$

$u = S_1(t)$, $du = [S_1(t)]'$

$v = S_2(t)$, $dv = [S_2(t)]'$

Exercice n° 1

Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{t.cost}\,dt$

On a $S_1(t) = t$, $[\,S_1(t)]' = [t]' = 1$

$[\,S_2(t)]' = \cos(t)$, soit $S_2(t) = \mathrm{sint}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{t.cos(t)}\,dt = [\,S_1(t)\,.S_2(t)]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} [\,S_1(t)]'\,S_2(t)dt = [t.sin(t)]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} sin(t)\,dt$$

$$= [t.sin(t)]_0^{\frac{\pi}{3}} + [cos(t)]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} + [cos(t)\,]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$$

Pour rappel $sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Exercice n° 2

Calculer l'integrale suivante : $\int t.e^t.dt$

L'intégration par partie donne:

On a :$u = t$, $du = dt$ et $dv = e^t.dt$ avec $v = e^t$

$$\int t.e^t.dt = te^t - \int e^t.dt = te^t - e^t + c = e^t(t - 1) + c$$

Exercice n°3

Soit $S_1(t) = t^2$ et $S_2(t) = \cos(\mathrm{n\,t})$,

Calculer l'intégrale suivante : $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S_1(t)\ \ S_2(t)dt$

$[\ S_1(t)]' = [t^2]' = 2t$,$[\ S_2(t)]' = [cos(n\,t)]' = \frac{1}{n}\sin(\mathrm{n\ t})$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S_1(t)\ .\ S_2(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2 . cos(n\,t)dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\left[t^2\frac{sin(n\,t)}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2t.\frac{sin(n\,t)}{n}dt\ ]\right\} =$$

$$\frac{-2}{\pi}\left\{\left[t\left(-\frac{cos(n\,t)}{n^2}\right)\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{cos(n\,t)}{n^2}dt\right\} = \frac{-2}{\pi}\left\{-\frac{2\pi}{n^2} + \left[\left(\frac{sin(n\,t)}{n^3}\right)\right]_0^{2\pi}\right\} = \frac{4}{n^2}$$

Exercice n°4

Soit $S_1(t) = t^2$ et $S_2(t) = \sin(\mathrm{n\ t})$

Calculer l'intégrale : $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2 . sin(n\,t)dt$

$[\ S_1(t)]' = [t^2]' = 2t$,$[\ S_2(t)]' = [sin(n\,t)]' = -\frac{1}{n}\cos(\mathrm{n\ t})$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S_1(t)\ \ S_2(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2 . sin(n\,t)dt = \frac{1}{\pi}\left\{\left[-t^2\frac{cos(n\,t)}{n}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2t.\frac{cos(n\,t)}{n}dt\right\} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{4\pi^2}{n} + \left[2t\frac{sin(n\,t)}{n^2}\right]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi}\frac{sin(n\,t)}{n^2}dt\right\} = \frac{-4\pi}{n} + \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{cos(n\,t)}{n^3}\right)\right]_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n}$$

Règle de l'Hôpital

Considérons deux signaux $S_1(t)$ et $S_2(t)$ continues et dérivables en un point t_0 et tels que :

$$\lim_{t\to t_0} S_1(t) = \lim_{t\to t_0} S_2(t) = 0$$

$$\lim_{t\to t_0}\frac{S_1(t)}{S_2(t)} = \lim_{t\to t_0}\frac{[S_1(t)]'}{[S_2(t)]'}$$

Exemple :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\mathrm{t})}{\mathrm{t}} = \lim_{t\to 0}\frac{[\sin(\mathrm{t})]'}{[\mathrm{t}]'} = \lim_{t\to 0}\frac{[\cos(0)]'}{1} = 1$$

Somme des Puissances (ou énergies) de deux signaux

La puissance ou l'énergie de la somme de deux signaux $S_1(t)$ et $S_2(t)$ n'est pas la somme des puissances ou des énergies :

Dans les deux cas on :

$$| S_1(t) + S_2(t) |^2 = | S_2(t) |^2 + | S_1(t) |^2 + S_1(t).S_2^*(t) + S_1^*(t).S_2(t) \neq | S_1(t) |^2 + | S_2(t) |^2$$

Inégalité de Schwartz

Deux signaux $S_1(t)$ et $S_2(t)$ vérifient l'inégalité dite de Schwartz.

$$|< S_1(t) \,.\, S_2(t) >|^2 \leq < S_1(t) \,.S_1(t) >< S_2(t)S_2(t) >$$

Soit sous la forme intégrale : $\left| \int_{t_1}^{t_2} S_1(t).S_2^*(t)dt \right|^2 \leq \int_{t_1}^{t_2} | S_1(t) |^2 \, dt \,.\int_{t_1}^{t_2} | S_2(t) |^2 \, dt$

Avec la condition que $S_1(t) = k.S_2(t)$ Ou encore

$$|< S_1(t) \,, S_2(t) >| \leq || S_1(t) || \,.\, || S_2(t) ||$$

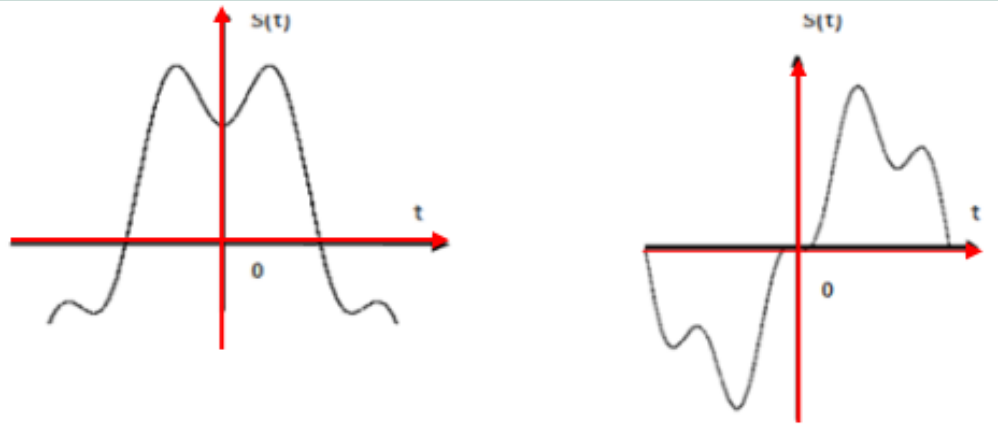
Parité et imparité des signaux

Signal paire

On dit qu'un signal $S(t)$ est paire (invariance par retournement) si et uniquement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Il est paire si :
$\mathbf{S(t) = S(-t)}$, $\forall$ **t**. fig. 6(a).
Par exemple le signal $S(t) = A\cos(\omega t)$ est un signal pair

Signal impaire

Le signal $S(t)$ est dit impaire (symétrie par retournement) si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine **0**.Il est impair si $S(t) = -S(-t)$, $\forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}$, fig.6 (b)
Par exemple le signal $S(t) = A\sin(\omega t)$ est un signal impair.



(a) (b)

Fig.6: signal pair (a), signal impair (b)

Tout signal réel est une somme d'un signal pair $S_p(t)$ et d'un signal impair $S_{imp}(t)$ fig.7

$$S(t) = S_p(t) + S_{imp}(t)$$
$$S_p(t) = ½ [S(t) + S(-t)]$$
$$S_{imp}(t) = ½ [S(t) - S(-t)]$$

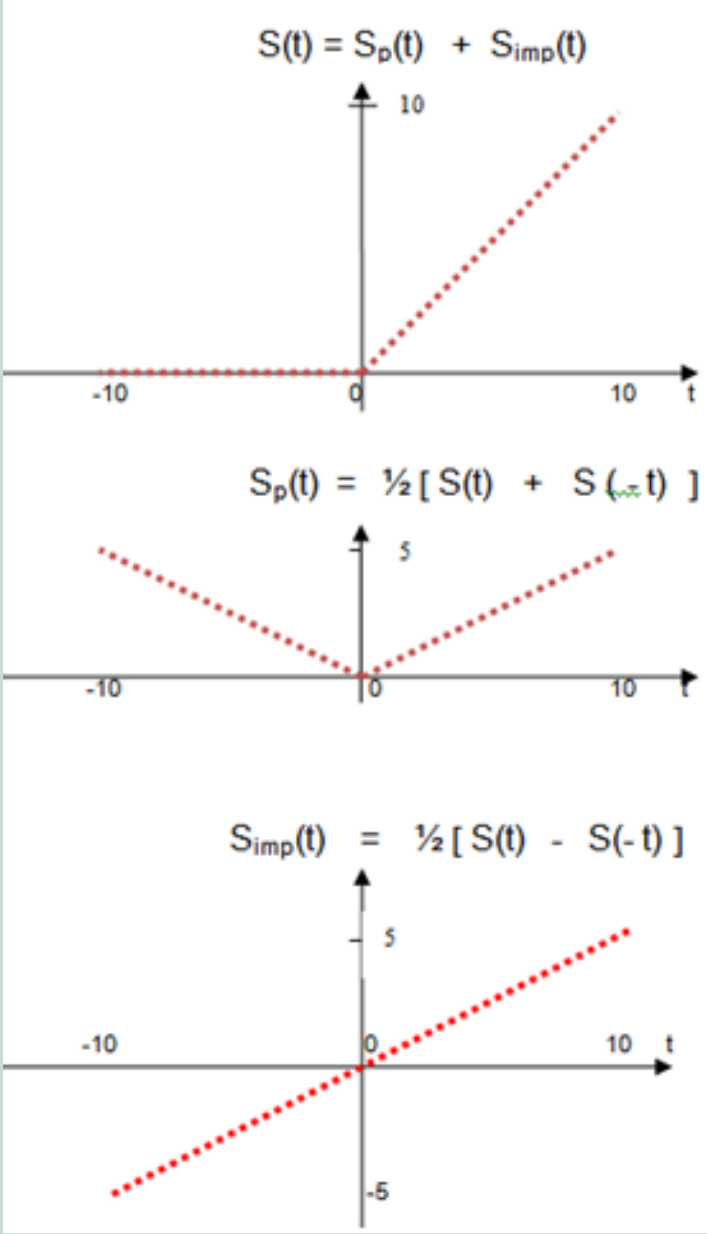


Fig.7 : Exemple de signal pair et impair

Quelques propriétés

On se rappelle des propriétés suivantes :

- Le produit de deux signaux qui possèdent la même parité est un signal pair
- Le produit de deux signaux qui possèdent des parités différentes est un signal impaire
- Le produit de deux signaux impairs est un signal pair
- L'inverse d'un signal pair est un signal pair
- L'inverse d'un signal impair est un signal impair
- La somme de deux signaux pairs est un signal pair
- La somme de deux signaux impairs est un signal impair
- Un signal peut n'être ni paire ni impaire
- Si un signal $S(t)$ est impair, on a : $\int_{-a}^{a} S(t)\ dt = 0$, si $a > 0$
- Si un signal est pair, on a : $\int_{-a}^{a} S(t)\ dt = 2\int_{0}^{a} S(t)\ dt$ si $a > 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} S^2{}_{pair}(t)\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} S^2{}_{impair}(t)\, dt$

Exercice n°1

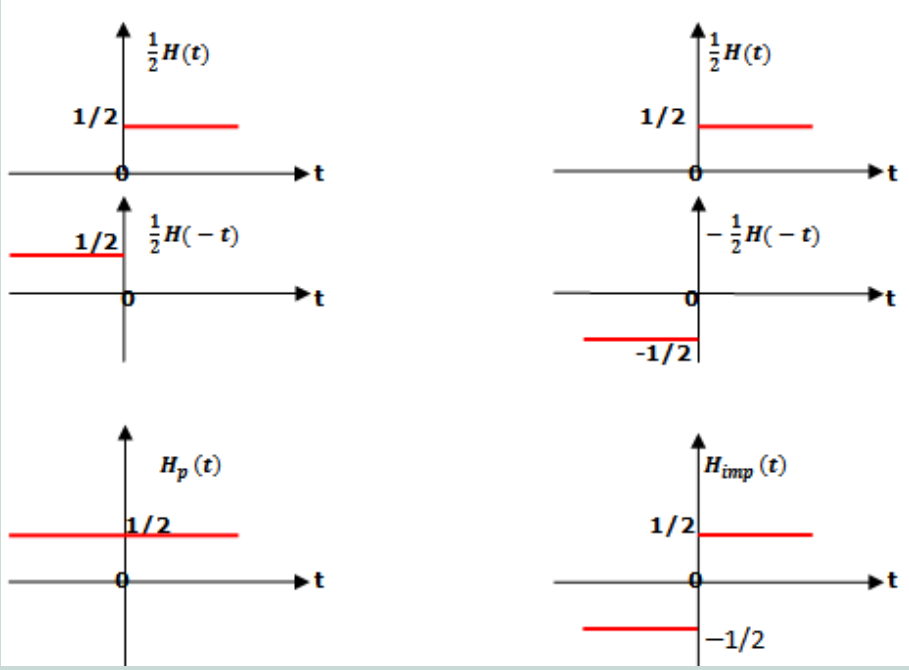
soit $H(t)$ la fonction de Heaviside .Représenter cette fonction par la somme d'une fonction paire et impaire.
Réponse, on a:

$H(t) = H_p(t) + H_{imp}(t)$

$H_p = \frac{1}{2}[H(t) + H(-t)]$

$H_{imp}(t) = \frac{1}{2}[H(t) - H(-t)]$, soit.

$H_p(t) + H_{imp}(t) = \frac{1}{2}[H(t) + H(-t)] + \frac{1}{2}[H(t) - H(-t)] = H(t)$



Exercice n°2

Soient deux signaux $S_{1p}(t)$ *et* $S_{2p}(t)$ pairs, montrer que leur produit est un signal pair. Soit :

$y(t) = S_{1p}(t) \,.\, S_{2p}(t)$, on a : $y(-t) = S_{1p}(-t) \,.\, S_{2p}(-t)$

Comme $S_{1p}(-t) = S_{1p}(t)$ et $S_{2p}(-t) = S_{2p}(t)$

D'ou $y(t) = S_{1p}(t) \,.\, S_{2p}(t)$ est un signal pair

Exercice n°3

Considérons deux signaux $S_{1imp}(t)$ *et* $S_{2imp}(t)$ impairs, montrer que leur produit est un signal pair. Soit :

$y(t) = S_{1imp}(t) \,.\, S_{2imp}(t)$, on a:

$y(-t) = S_{1imp}(-t) \,.\, S_{2imp}(-t)$

Comme $S_{1\mathrm{imp}}(-t) = -S_{1imp}(t)$ et $S_{2\mathrm{imp}}(-t) = -S_{2imp}(t)$

On a: $y(-t) = [-S_{1imp}(t)][-S_{2imp}(t)] = S_{1imp}(t) \,.\, S_{2imp}(t) = y(t)$

Donc $y(-t) = y(t)$: signal pair

Exercice n°4

Montrer que le produit d'un signal pair par un signal impair donne un signal impair.
On a:

$y(t) = S_{imp}(t) \,.\, S_p(t)$

$y(-t) = S_{imp}(-t) \,.\, S_p(-t) = S_p(t) \,.[-S_{imp}(t)]$, soit $y(-t) = -S_{imp}(t) \,.\, S_p(t$:

Donc : $y(-t) = -y(t)$

Exercice n°5

Soit donné un signal $S(t)$ défini par :

$S(t) = \cos t + \sin t + \sin t \cos t$

Trouver sa partie paire et sa partie impaire.

Détermination de la partie paire

$S_{paire}(t) = \frac{1}{2}[S(t) + S(-t)] = \frac{1}{2}[\cos t + \sin t + \sin t \cos t + \cos(-t) + \sin(-t) + \sin(-t)\ \cos(-)t] = \frac{1}{2}[\cos t + \sin t + \sin t \cos t + \cos t - \sin t - \sin t \cos t] = \cos t$

Détermination de la partie impaire

$$S_{imp}(t) = \frac{1}{2}[\ S(t) - S(-t)\ ]$$
$$= \frac{1}{2}[\cos t + \sin t + \sin t \cos t - \cos(-t) - \sin(-t) - \sin(-t)\ \cos(-t)]$$
$$= \frac{1}{2}[\cos t + \sin t + \sin t \cos t - \cos t + \sin t + \sin t \cos t] = \sin t + \sin t \cos t$$

Exercice n°6

Soit le signal $S(t) = e^{-2t}\cos t$, déterminer sa partie paire et sa partie impaire.
On a: $S(t) = S_p(t) + S_{imp}(t)$

Détermination de la partie paire

$$S_p = \frac{1}{2}[S(t) + S(-t)\ ]$$
$$S(-t) = e^{-2(-t)}\cos(-t) = e^{+2t}\cos t = S(t)$$

Car $\cos(-t) = \cos t$: fonction paire

$$S_p = \frac{1}{2}[S(t) + S(-t)] = \frac{1}{2}[e^{-2t}\cos(-t) + e^{+2t}\cos(-t)\ ] =$$

$$\frac{1}{2}\cos t\,[e^{+2t} + e^{-2t}\ ] = \cos t\,\frac{[e^{+2t}+e^{-2t}\ ]}{2} = \cos t\,.\,\mathrm{ch}(\,t)$$

$\frac{[e^{+2t}+e^{-2t}\ ]}{2}$: étant le cosinus hyperbolique

Détermination de la partie impaire

$$S_{imp}(t) = \frac{1}{2}[\ S(t) - S(-t)\ ]$$

$$S_{imp}(t) = \frac{1}{2}[\ S(t) - S(-t)\ ] = \frac{1}{2}[\ e^{-2t}\cos t - e^{-2(-t)}\cos(-t\,)\ ] =$$

$$= \frac{1}{2}[\ e^{-2t}\cos t - e^{2t}\cos t\ ] = -\cos t\,\frac{[e^{+2t} - e^{-2t}\ ]}{2} = -\cos t\,.\,sh(t)$$

$\frac{[e^{+2t} - e^{-2t}\ ]}{2}$: étant le sinus hyperbolique

Exercice n°7

Décomposer le signal suivant en ses composantes paire et impaire

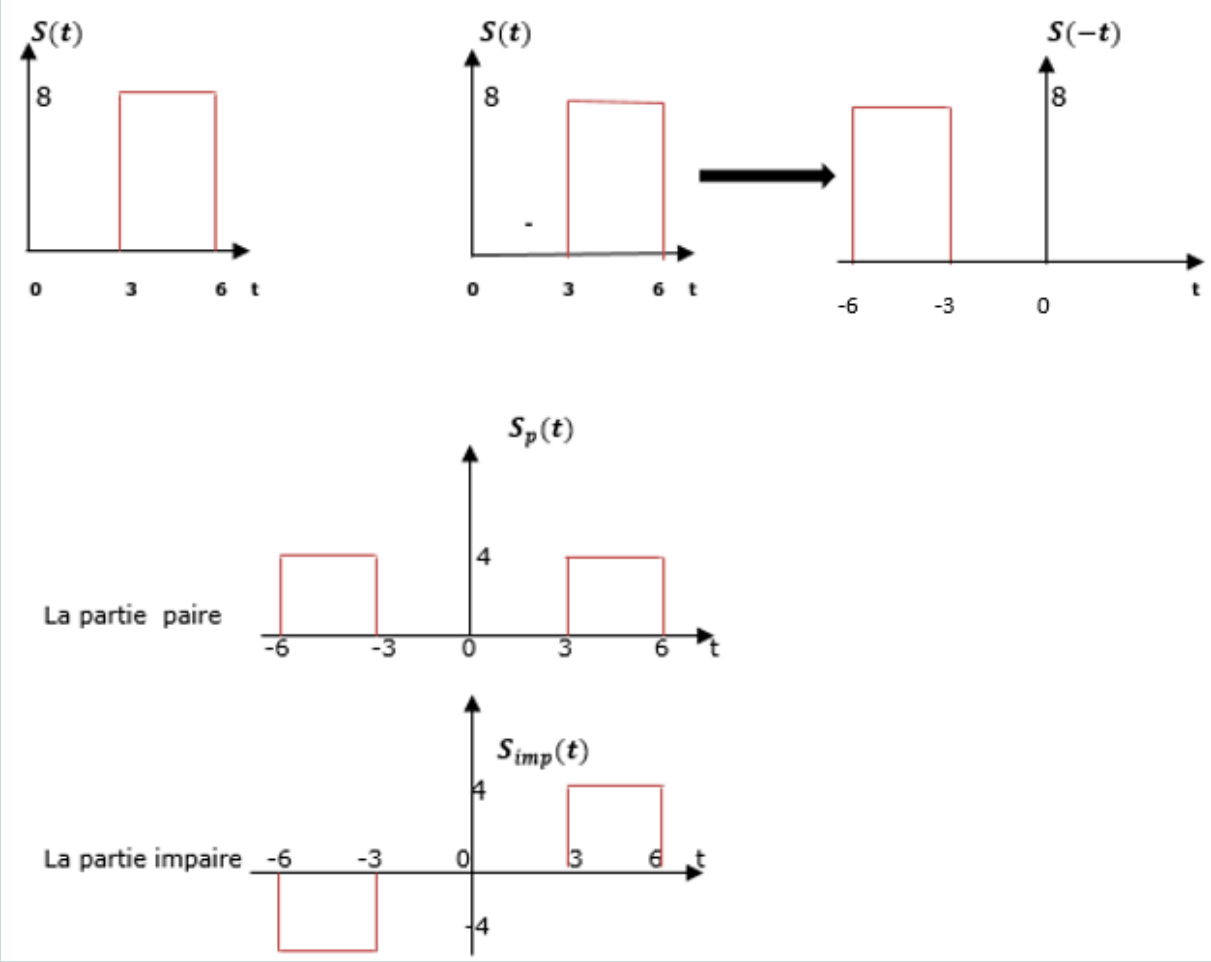


Figure : principe de décomposition d'un signal en ses composantes paire et impaire

Les principales étapes pour décomposer le signal $s(t)$ en ses composantes paire et impaire sont :

1) Calculer $S(-t)$
2) Calculer les composantes paire et impaire, il faut pour cela soit additionner soit soustraire les deux graphes précédents.
3) réduire de moitié l'amplitude (8 dans notre cas)

Devoir

Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)\ \mathrm{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} S^2{}_{pair}(t)\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} S^2{}_{impair}(t)\, dt$$

Décalage temporel

Les signaux sont assimilés à des fonctions, il est possible de leur faire subir différentes opérations mathématiques.
Il est souvent en analyse du traitement des signaux de devoir décaler temporellement un signal $\boldsymbol{S(t)}$ (**shifting**); on obtient ainsi un nouveau signal $\boldsymbol{S(t \mp a)}$.Ce décalage $\boldsymbol{a}$ peut être négatif (décalage retardé) ou positif (décalage avancé) fig. 8

– Pour toute valeur de $\boldsymbol{a > 0}$, on dit que:

– Le signal est avancé si on a $\boldsymbol{S(t+a)}$ c'est-à-dire faire une translation horizontale du signal $\boldsymbol{S(t)}$ de la valeur de $\boldsymbol{a}$ vers la gauche.

–Le signal est retardé si on a $\boldsymbol{S(t-a)}$ c'est à dire lorsqu'on fait une translation horizontale du signal $\boldsymbol{S(t)}$ de la valeur $\boldsymbol{a}$ vers la droite.

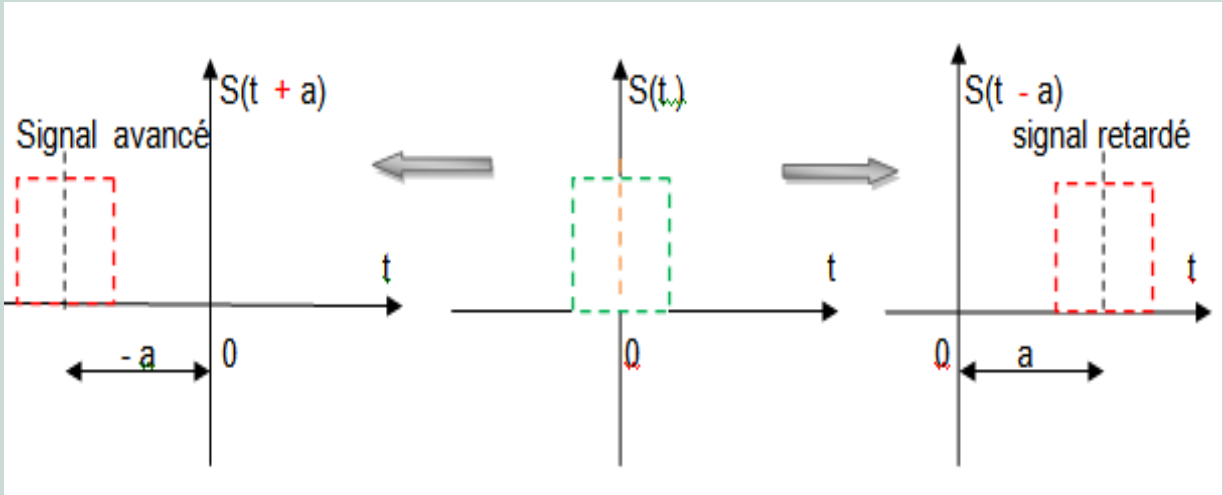
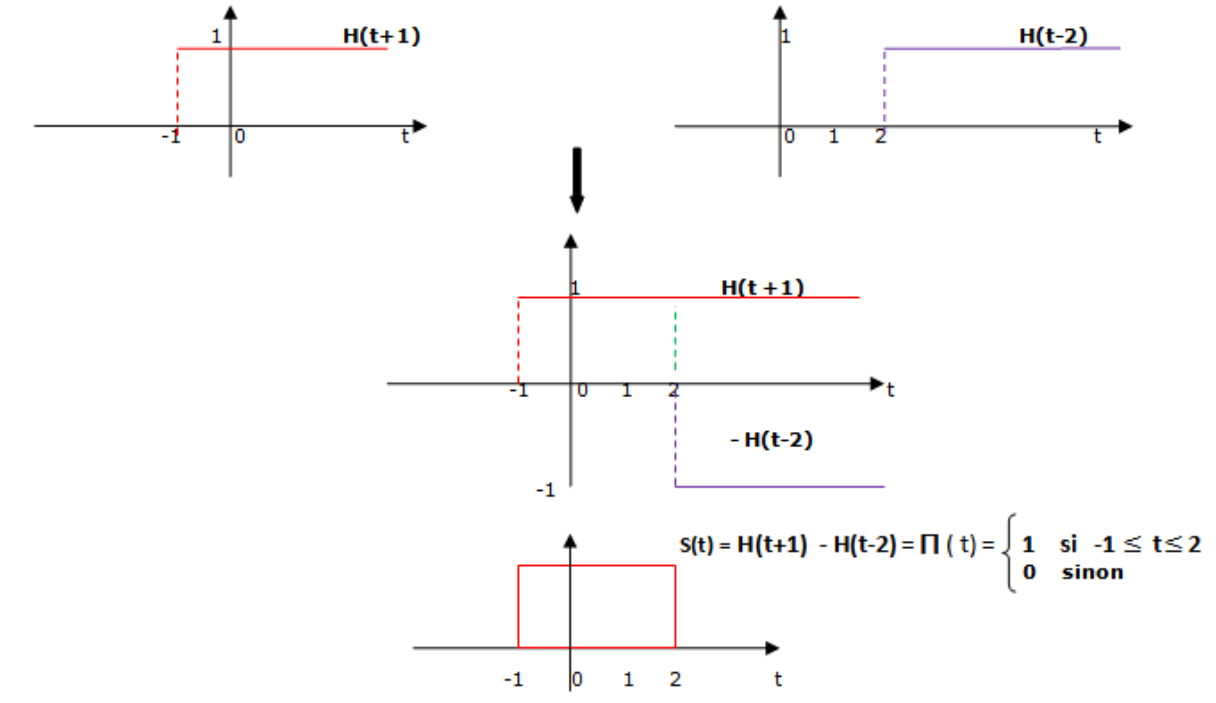


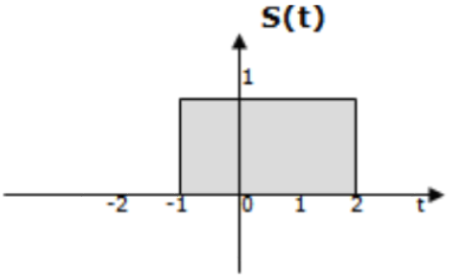
Fig. 8.Exemple d'un signal porte retardé et avancé

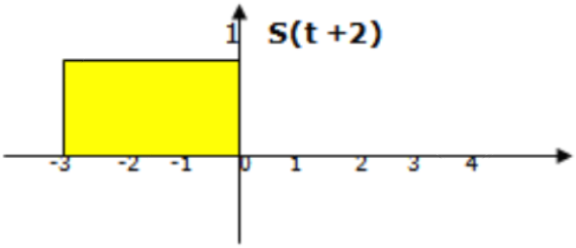
Exercice n°1

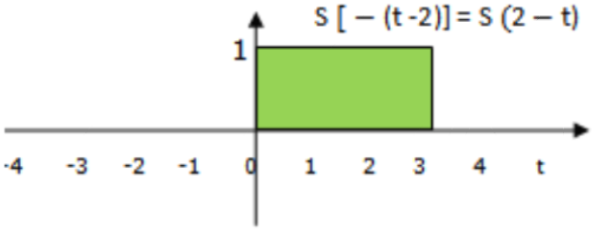
Soit un signal $\boldsymbol{S(t)} = \boldsymbol{H(t+1) - H(t-2)}$
$H(t)$: La fonction Heaviside (échelon unité) d'amplitude 1

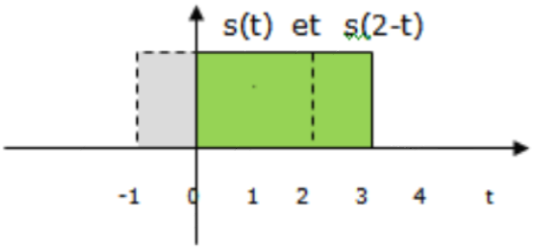
1-Tracer le graphe de $\boldsymbol{S(t)}$
2)-Tracer le graphe de $\boldsymbol{S(t)} + \boldsymbol{S(2-t)}$
3)-Représentation du graphe $\boldsymbol{S(t)}$
4)-Représentation du graphe du signal $\boldsymbol{y(t)} = \boldsymbol{S(t)} + \boldsymbol{S(2-t)}$

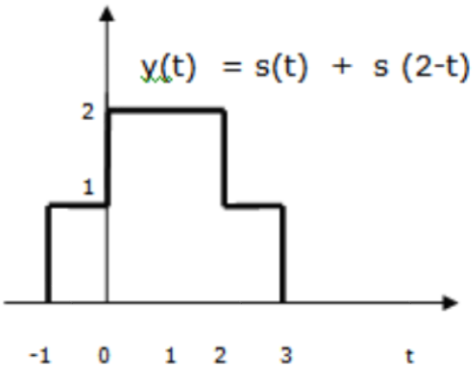

H(t+1)
1
-1
0
t
H(t-2)
1
0
1
2
t
H(t+1)
1
-1
0
1
2
t
- H(t-2)
-1
S(t) = H(t+1) - H(t-2) = ∏ (t) = { 1 si -1 ≤ t ≤ 2 ; 0 sinon
-1
0
1
2
t









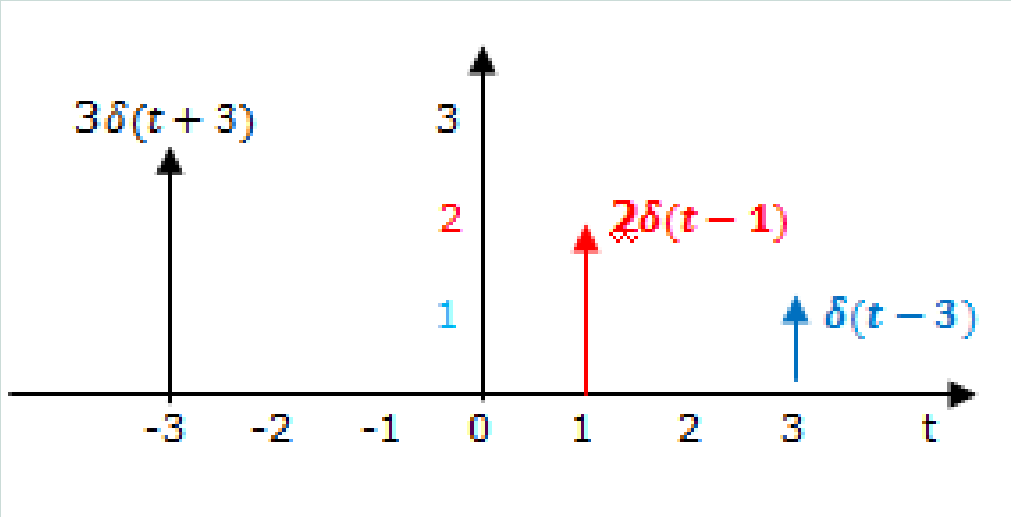


$$y(t) = s(t) + s(2-t) = \begin{cases} \sqcap(t) = 1 & -1 \le t \le 0 \\ \sqcap(t) = 2 & 0 \le t \le 2 \\ \sqcap(t) = 1 & 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

Exercice n°2

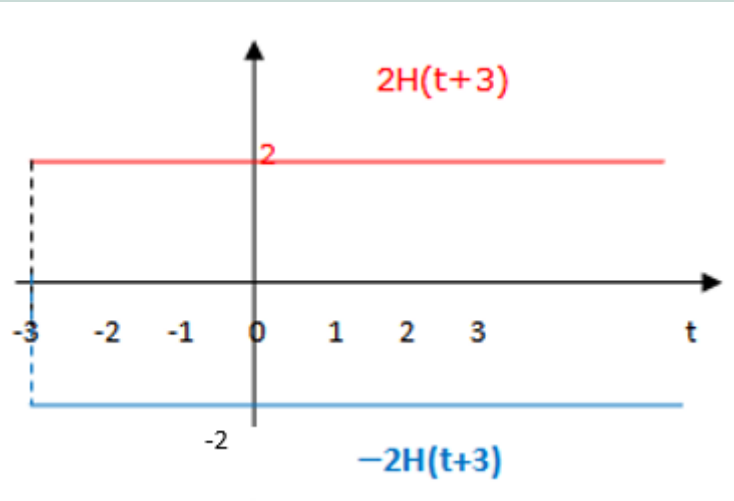
Représenter sur le même graphe les signaux suivants :

$\boldsymbol{2\delta(t-1)}$ **,** $\boldsymbol{\delta(t-3)}$ et $\boldsymbol{3\delta(t+3)}$



Exercice n°3

Représenter le graphe du signal Heaviside $\boldsymbol{-2H(t+3)}$



Devoir

exercice n° 1 :

Soit un signal porte d'expression :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représenter le graphe de ce signal

exercice n° 2 :

Représenter le graphe de la fonction : $\mathbf{2\Pi_T(t-a)} = \mathbf{2}\, rect_T(t-a)$

Pour les cas suivants :

$\mathbf{a = 0}$, $\mathbf{T = 2}$

$\mathbf{a = 3}$, $\mathbf{T = 1}$

$\mathbf{a = -2}$, $\mathbf{T = 4}$

Produit scalaire des signaux

Soient $S_1(t)$ et $S_2(t)$ deux signaux complexes, on définit leur produit scalaire par :

$$< S_1(t) \,.S_2(t) > \; = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) \,.S_2{}^*(t) \;\; \mathbf{dt}$$

Il ressort que :

1 – Le produit scalaire d'un signal (cas s'un signal à énergie finie) non périodique par lui-même est égal à son énergie $E_{S(t)}$

$$< s(t) \,.\, s(t) > \; = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \,.s(t)^*(t) \;\; \mathbf{dt} \; = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 \, dt \; = \; E_{S(t)}$$

2 – Le produit scalaire d'un signal périodique de période T_0 par lui-même est égal à sa puissance $P_{S(t)}$

$$< S_{T_0}(t) \,.S_{T_0}(t) > \; = \; \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left|S_{T_0}(t)\right|^2 dt = P_{S(t)}$$

3 – Le produit scalaire de deux signaux périodiques de période T_1 et T_2 est :

$$< S_{T_1}(t) \,.S_{T_2}(t) > \; = \; \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} S_{T_1}(t) \;\; . \;\; S_{T_2}{}^*(t) \;\; \mathbf{dt} \;\; \neq 0$$

Pour $T_1 = \frac{T_2}{n} (n = 1, 2, 3 \ldots.)$

$$< S_{T_1}(t) \,.S_{T_2}(t) > = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} S_{T_1}(t) \;\; . \;\; S_{T_2}{}^*(t) \;\; \mathbf{dt} = 0 \qquad \text{pour } T_1 \neq \frac{T_2}{n}$$

Remarque :

- Le produit scalaire d'un signal par lui-même est égal à son énergie, équivalent du carré de la norme.

- Deux signaux périodiques qui possèdent des périodes multiples ont un produit scalaire .le calcul de leur produit scalaire sera estimé sur la période la plus longue et rapporté à celle-ci.

- Lorsque les périodes ne sont pas multiples l'une de l'autre, ils sont orthogonaux.

- **Produit scalaire de signaux réels**

Nous avons mentionné plus haut que les signaux réels sont à énergie finie et amplitudes bornées , autrement dit causaux, soit $S(t) = 0$ pour $\mathbf{t} < \mathbf{0}$, leur produit scalaire est défini par :

$$< S_1(t).S_2(t) > \quad = \quad \int_{t_1}^{t_2} S_1(t) \,.S_2(t) dt$$

Le produit scalaire possède la propriété de symétrie hermitienne.

$$< S_1(t).S_2(t) > = < S_2(t).S_1(t) >^*$$

$$< S_1(t).\ S_1(t) > \quad = \quad \int_{t_1}^{t_2} S_1(t)\ .S_1^*\ (t)dt \ = \ \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2\ dt \ = E_S$$

(Valable pour les signaux à énergie finie)

- **Produit scalaire des signaux complexes**

Les signaux complexes, d'énergie finie, forment un espace vectoriel de Hilbert sur C que l'on peut munir d'un produit scalaire. Le produit scalaire de deux signaux $S_1(t)$ et $S_2(t)$ à énergie finie sur un intervalle de temps $[t_1\ , t_2\ ]$ est :

$$< S_1(t)\ .\ S_2(t) > \ = \ \int_{t_1}^{t_2} S_1(t).S_2^*\ (t)dt = \int_{t_1}^{t_2} [S_{1r}(t) + jS_{1im}(t)][\ S_{2r}(t) - \mathrm{j}S_{2im}(t)]dt$$

- **Produit scalaire d'un signal avec une distribution de Dirac**

$$< S(t).\delta(t) > = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)\delta(t)dt = \ S(0)$$

- **Produit scalaire des signaux non périodiques**

Soient deux signaux $S_1(t)$ et $S_2(t)$, leur produit scalaire est :

$$< S_1(t).S_2(t) > \quad = \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S_1(t).\ S_2^*\ (t)dt$$

- **Produit scalaire des signaux périodiques**

Le produit scalaire entre deux signaux périodiques de même période T_0 a pour expression :

$$< \ S_1(t).S_2(t) > \ = \ \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} S_1(t)\ .\ S_2^*\ (t)dt$$

Le produit scalaire d'un signal périodique de période T_0 par lui-même donne sa puissance.

$$< S(t).S(t) > \ = \ \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |S(t)|^2\ dt = P_S$$

Les signaux périodiques dont les périodes ne sont pas multiples l'une de l'autre sont orthogonaux.

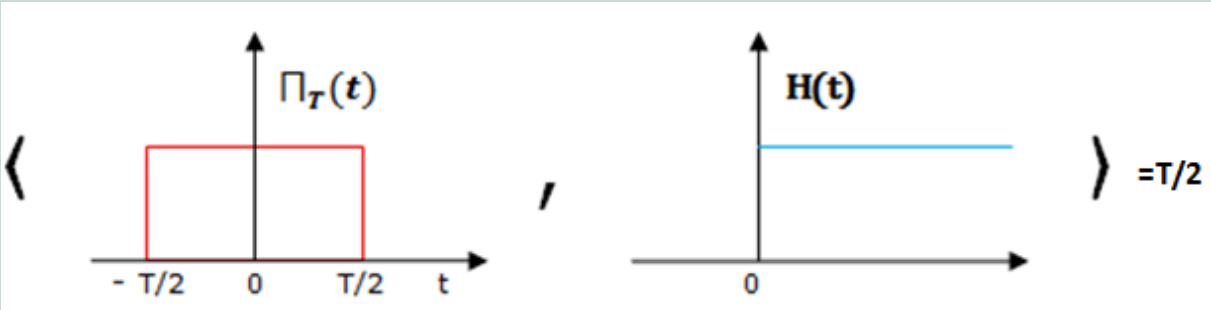
Remarque : Dans le cas complexe on a :

$< S_1(t) . S_2(t) > \neq < S_2(t) . S_1(t) >$

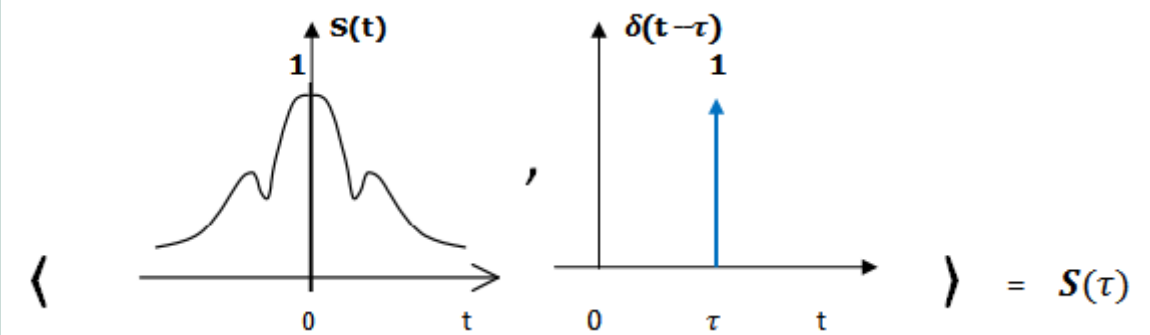
$< S_1(t) . S_2(t) > = < S_1(t) . S_2(t) >^*$

Exercice n°1

1-Produit scalaire d'un signal porte d'amplitude 1 et de durée T par un échelon unité soit $< \Pi_T(t) . H(t) >$



2-Produit scalaire d'un signal quelconque par un Dirac décalé de τ , soit :
$< S(t) . \delta(t - \tau) >$



Exercice n°2

Calcul du produit scalaire de deux signaux périodiques et de même période T_0
Déterminer le produit scalaire $< \cos 2\pi f_0 t \ . \ \cos 2\pi f_0 t >$, on a :
Sachant que : $2\pi f_0 = \omega_0$, $f_0 = \frac{1}{T_0}$

$$< \cos 2\pi f_0 t \ . \cos 2\pi f_0 t > \ = \ < \cos \omega_0 t \ . \ \cos \omega_0 t > = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} S_1(t) . S_2(t) dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos 2\pi f_0 t \ . \ \cos 2\pi f_0 t \ \ dt \ = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} cos^2 \omega_0 t \ dt \ = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2} \ dt$$

$$\frac{1}{2T_0} \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} dt \ + \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos 2\omega_0 t \ dt \right] = \frac{1}{2T_0} t + \frac{1}{2\omega_0 2T_0} \sin 2\omega_0 t \ = \left[\frac{1}{2T_0} t + \frac{1}{2\omega_0 2T_0} \sin 2\omega_0 t \right]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \sin 2\pi \ = \frac{1}{2} \ , \quad \text{car} \ \ \sin 2\pi \ = 0$$

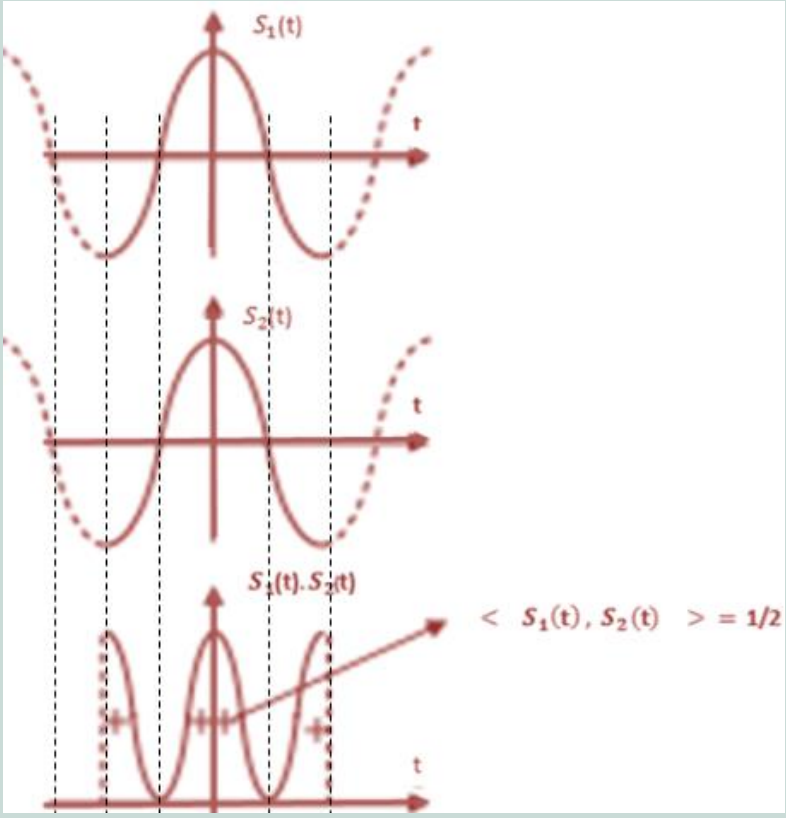


Figure représentant le Produit scalaire produit scalaire $\langle \cos 2\pi f_0 t \ . \ \cos 2\pi f_0 t \rangle$

Exercice n°3

Cas d'un produit scalaire de deux signaux périodiques et de même période T_0

Déterminer le produit scalaire $< \sin 2\pi f_0 t \ . \ \cos 2\pi f_0 t >$, on a :

Le produit scalaire de deux fonctions périodiques est :

$$< S_1(t).S_2(t) > \; = \; \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} S_1(t).\; S_2^*\,(t)dt$$

$$< \sin 2\pi f_0 t \;\; .\cos 2\pi f_0 t >= < \sin \omega_0 t \;\; . \;\; \cos \omega_0 t >$$

En utilisant l'identité trigonométrique

$\sin a \; .\cos b \; = \frac{1}{2}[sin\,(a-b) + sin\,(a+b)]$ **, comme** $a \; = \; b$

On obtient **:** $\sin a \; .\cos b \; = \frac{1}{2}\sin 2a$

$$< \sin \omega_0 t \;\; .\cos \omega_0 t >= \frac{1}{2T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sin 4\pi f_0 t \;\; dt = \frac{1}{2T_0}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sin 2\omega_0 t \;\; dt\right]$$

$$= -\frac{1}{4\,\omega_0\,T_0}[([cos2\omega_0 t])]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \; = \; 0$$

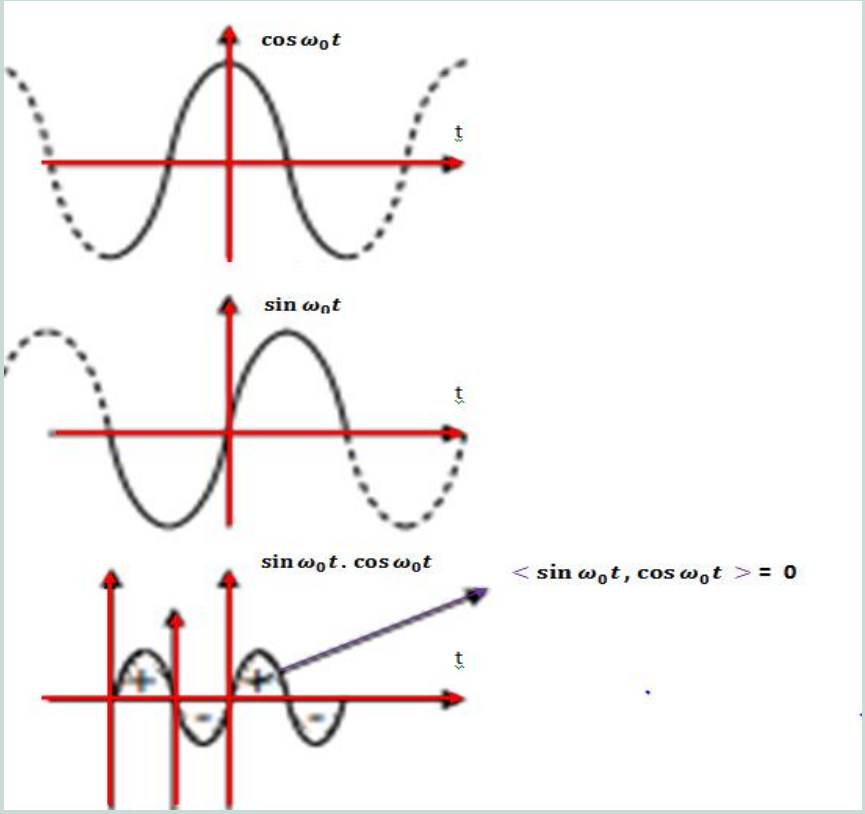


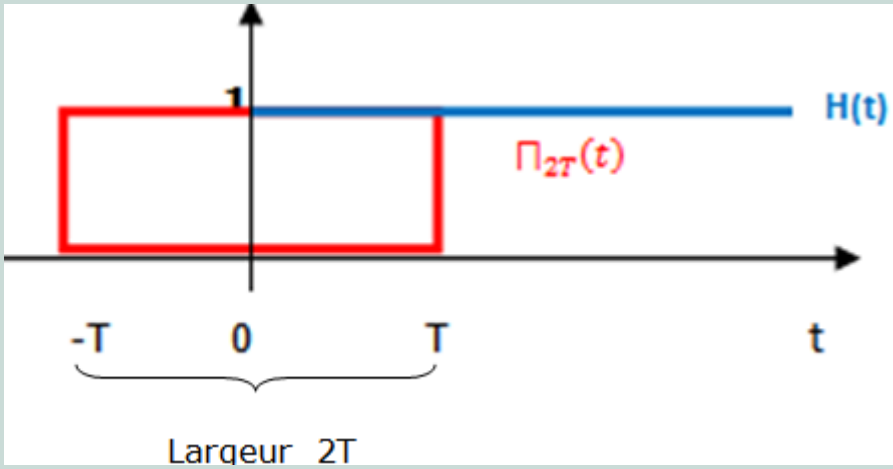
Figure représentant le produit scalaire $< \sin 2\pi f_0 t \;\; . \;\; \cos 2\pi f_0 t >$,

Exercice n°4

Représenter graphiquement et calculer le produit de scalaire suivant :

$< \Pi_{2T}(t) . \ H(t) >$

$< \Pi_{2T}(t) . H(t) >= \int_{-T}^{T} \Pi_{2T}(t). H(t) dt \ = \int_{0}^{T} \Pi_{2T}(t) dt \ = \int_{0}^{T} dt \ = \ [t]_{0}^{T} = T$



Exercice n°5

Calculer le produit scalaire de $< e^{j\omega t} . e^{-j\omega_0 t} >$, on a :

$< e^{j\omega t} . e^{-j\omega_0 t} >= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} S_1(t). S_2^*(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j\omega t} . e^{-j\omega_0 t} dt =$

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} [(\cos \omega t + j \sin \omega t) \ \ (\cos\omega_0 t - j \sin \omega_0 t) \ ] dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} [(\cos \omega t. \cos\omega_0 t - j\cos \omega t . \sin \omega_0 t) \ + j\cos\omega_0 t. \sin \omega t \ - j^2 \sin\omega_0 t . \sin \omega t] dt$$

Pour $\omega_0 = \omega$, on a :

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} [(\cos \omega t + j \sin \omega t) \ \ (\cos\omega_0 t - j \sin \omega_0 t) \ ] dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}[\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t\,]dt \;= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}[\cos^2 \omega t \;+ \sin^2 \omega t\;]dt \;= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} dt \;=\; \frac{1}{T_0}[t]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \;= 1$$

Pour $\omega \neq \omega_0$, on a :

$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}[(\cos \omega t + j \sin \omega t)\;\;(\cos\omega_0 t - j \sin \omega_0 t\,]dt \;= 0$$

SIGNAUX ORTHOGONAUX

On dit que deux signaux $S_1(t)$ et $S_2(t)$ sont orthogonaux dans l'intervalle $[t_1 , t_2\,]$ lorsque leur produit scalaire est nul, soit :

$$< S_1(t)\;.\;S_2(t) > = \int_{t_1}^{t_2} S_1(t).\; S_2^*(t)dt = 0$$

et $< S_2(t)\;.\;S_1(t) > \;=\; \int_{t_1}^{t_2} S_2(t).\; S_1^*(t)dt = 0$

$S_1^*(t)$ et $S_2^*(t)$ sont les conjugués des signaux complexes de $S_1(t)$ et $S_2(t)$

Lorsque $S_1(t)$ et $S_2(t)$ sont des signaux réels, ainsi la condition d'orthogonalité est : $\int_{t_1}^{t_2} S_1(t).S_2(t)dt = 0$

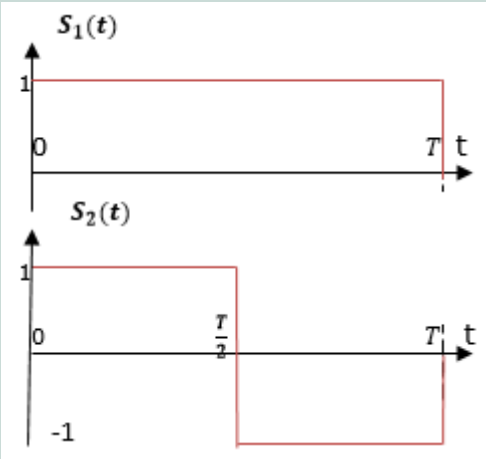
SIGNAUX ORTHONORMAUX

On dit que deux signaux $S_1(t)$ et $S_2(t)$ sont orthonormaux dans l'intervalle $[t_1 , t_2\,]$ si leur produit scalaire est égal à **1**, soit :

$$< S_1(t)\,.\;S_2(t) > \;=\; \int_{t_1}^{t_2} S_1(t).\; S_2^*(t)dt = 1 \quad \textbf{et} \quad < S_2(t)\;.\;S_1(t) > \;=\; \int_{t_1}^{t_2} S_2(t).\; S_1^*(t)dt = 1$$

Exercice n°1

Soient deux signaux $S_1(t)$ et $S_2(t)$, montrez qu'ils sont orthogonaux.



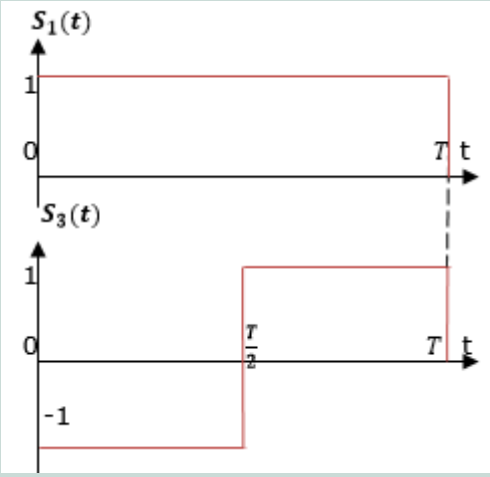
$$< S_1(t) \ . \ S_2(t) > = \int_0^T S_1(t).S_2(t)dt = \int_0^{\frac{T}{2}} S_1(t).S_2(t)dt + \int_{\frac{T}{2}}^T S_1(t).S_2(t)dt =$$

$$\int_0^{\frac{T}{2}} 1\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 1.(-1)dt = \int_0^{\frac{T}{2}} 1\,dt - \int_{\frac{T}{2}}^T 1.\,dt = \frac{T}{2} - T + \frac{T}{2} = 0$$

Conclusion : les signaux $S_1(t)$ et $S_2(t)$ sont orthogonaux

Exercice n°2

Soient deux signaux $S_1(t)$et $S_3(t)$, montrez qu'ils sont orthogonaux.



$$< S_1(t) \ . \ S_3(t) >= \int_0^T S_1(t) \,.\, S_3(t)dt = \int_0^{\frac{T}{2}} S_1(t).\, S_3(t)dt + \int_{\frac{T}{2}}^T S_1(t).S_3(t)dt =$$

$$\int_0^{\frac{T}{2}} (-1).\,1\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 1.\,1dt = -\int_0^{\frac{T}{2}} 1\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 1.\,dt = -\frac{T}{2} + T - \frac{T}{2} = 0$$

Ce sont des signaux orthogonaux.

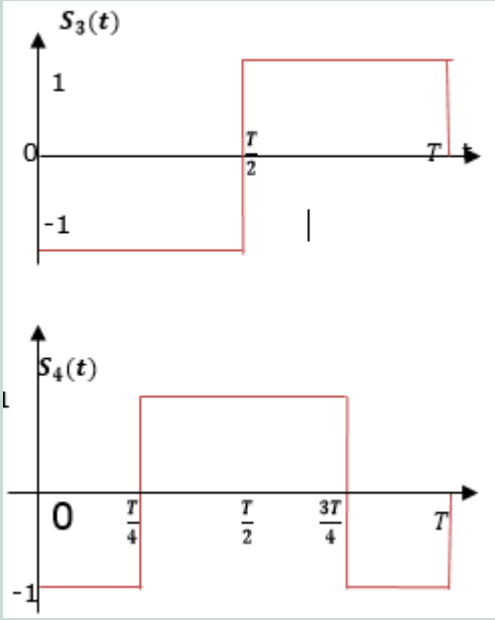
Exercice n°3

Soient deux signaux $S_3(t)$ et $S_4(t)$, montrez qu'ils sont orthogonaux.

$$< S_3(t) \ .S_4(t) > = \int_0^T S_3(t).S_4(t)dt = \int_0^{\frac{T}{4}} (-1)(-1).\,dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} (+1)(-1)\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} (+1)(+1)\,dt +$$

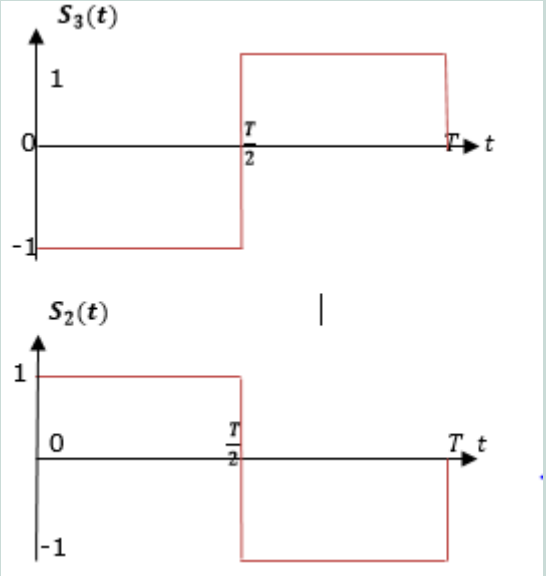
$$\int_{\frac{3T}{4}}^{T} (-1)(+1)\,dt = \int_0^{\frac{T}{4}} 1.\,dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} 1\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} 1\,dt - \int_{\frac{3T}{4}}^{T} 1\,dt = 0$$

Conclusion : les signaux $S_3(t)$ et $S_4(t)$ sont orthogonaux



Exercice n°4

Soient deux signaux $\boldsymbol{S_2(t)}$et $\boldsymbol{S_3}(t)$, montrez qu'ils sont orthogonaux



$< \boldsymbol{S_2(t)} \ .\boldsymbol{S_3(t)} >= \int_0^T S_2(t).S_3(t)dt = \int_0^{\frac{T}{2}} S_2(t).S_3(t)dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} S_2(t).S_3(t)dt =$

$\int_0^{\frac{T}{2}}(-1).1\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 1\,(-1)dt = -\int_0^{\frac{T}{2}} 1\,dt - \int_{\frac{T}{2}}^{T} 1.\,dt = -\frac{T}{2} - T + \frac{T}{2} \ = -T$

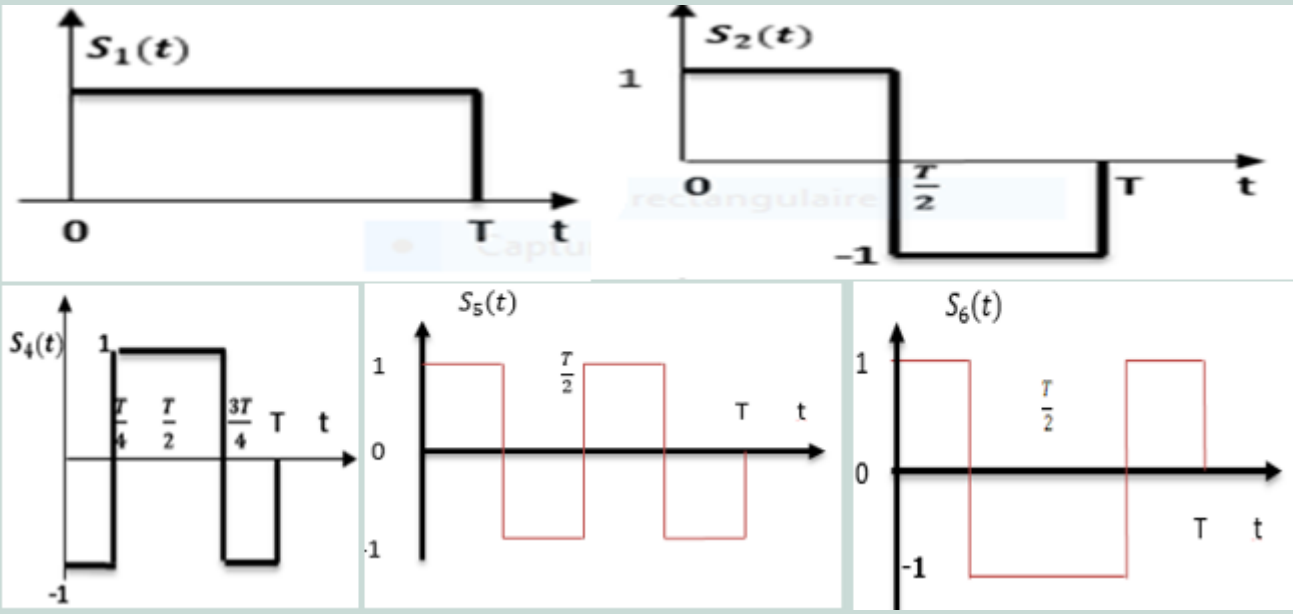
Ces deux signaux ne sont pas orthogonaux et ils sont en opposition de phase.

Devoir

Dites après calcul si les signaux (figures de dessus) sont-ils orthogonaux ou non deux à deux ?

Remarque : Les signaux $S_1(t)$, $S_2(t)$ et $S_5(t)$sont appelés signaux de **Rademacher** et les signaux $S_1(t)$, $S_2(t)$ et $S_6(t)$ sont appelés signaux de **Walsh**

$< S_1(t) \ . S_4(t) >$
$< S_2(t) \ . S_4(t) >$
$< S_1(t) \ . S_6(t) >$
$< S_1(t) \ . S_5(t) >$
$< S_4(t) \ . S_5(t) >$
$< S_4(t) \ . S_6(t) >$
$< S_2(t) \ . S_5(t) >$
$< S_2(t) \ . S_6(t) >$



Norme d'un signal

La norme euclidienne est la racine carrée de la somme des carrés des signaux. Elle est définie à partir du produit scalaire. La norme euclidienne d'un signal $\mathbf{S(t)}$ est par définition $\| \mathbf{S(t)} \|$.

1- Norme des Signaux à énergie finie

Le carré de la norme $\|\mathbf{S(t)}\|^2$ représente l'énergie du signal

$$\|\mathbf{S(t)}\|^2 = < s(t).s(t) > = < s(t).s(t) >^*$$

La norme d'un signal $S(t)$ à temps continu et à énergie finie est :

$$\|\mathbf{S(t)}\| = \sqrt{< s(t).s(t) >} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 \ \mathbf{dt}}$$

2- Norme des signaux non périodiques

La norme d'un signal $S(t)$ sur un intervalle T non périodique à temps continu est :

$$\|\mathbf{S(t)}\| = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |S(t)|^2 \, \mathbf{dt}}$$

3- Norme des Signaux périodiques

La norme d'un signal $S(t)$ périodique de période T_0 à temps continu et à puissance moyenne finie est :

$$\|\mathbf{S(t)}\| = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |S(t)|^2 \, \mathbf{dt}}$$

Distance entre deux signaux

Relation entre produit scalaire et distance euclidienne entre deux signaux

Considerons deux signaux $S(t)$ et $y(t)$ à temps continu , le lien entre leur produit scalaire et la distance euclidienne dans l'espace $L^2(t_1, t_2)$ est :

$$d^2[S(t), y(t)] = \int_{t_1}^{t_2} |S(t) - y(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} [S(t) - y(t)][S(t) - y(t)]^* dt =$$

$< [\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})] \,.[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})] > = < S(\boldsymbol{t}).\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t}) > - < y(\boldsymbol{t}).\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t}) > - < S(\boldsymbol{t}).\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) > + < y(\boldsymbol{t}).\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$

$\geq \|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t})\|^2 + \|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})\|^2 - (< S(\boldsymbol{t}).\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) > + < S(\boldsymbol{t}).\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) >^*)$

$= \|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t})\|^2 + \|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})\|^2 - 2\mathrm{R}(< S(\boldsymbol{t}).\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) >)$, $*$ conjugué

Lorsque les deux signaux sont orthogonaux c'est à dire $< S(\boldsymbol{t}).\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) >= 0$ et l'on aura :

$\boldsymbol{d}^2[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t}), \mathbf{y}(\boldsymbol{t})] = \|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t})\|^2 + \|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})\|^2$

1- Distance entre deux signaux à énergie finie

La distance euclidienne entre deux signaux à énergie finie est définie par :

$$\boldsymbol{d}[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t}), \mathbf{y}(\boldsymbol{t})] = \|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t}) - \mathbf{y}(\boldsymbol{t})\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t}) - \mathbf{y}(\boldsymbol{t})|^2 dt}$$

Cette distance associée mesure la dissemblance entre les deux signaux $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t})$ et $\mathbf{y}(\boldsymbol{t})$

2 – Distance entre deux signaux périodiques

La distance euclidienne entre deux signaux périodiques de même période $\boldsymbol{T_0}$ est définie par :

$$\boldsymbol{d}[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t}), \mathbf{y}(\boldsymbol{t})] = \sqrt{\frac{1}{\boldsymbol{T_0}} \int_0^{\boldsymbol{T_0}} |\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t}) - \mathbf{y}(\boldsymbol{t})|^2 dt}$$

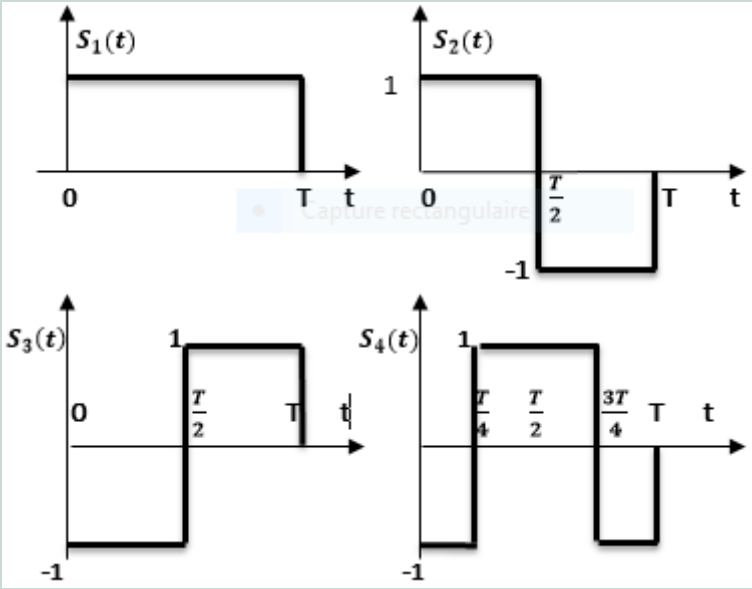
3 – Distance entre deux signaux non périodiques

La distance euclidienne entre les deux signaux non périodiques est :

$$\boldsymbol{d}[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t}), \mathbf{y}(\boldsymbol{t})] = \sqrt{\lim_{\boldsymbol{T}\to\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}} \int_{\frac{-\boldsymbol{T}}{2}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{2}} |\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})|^2 \boldsymbol{dt}}$$

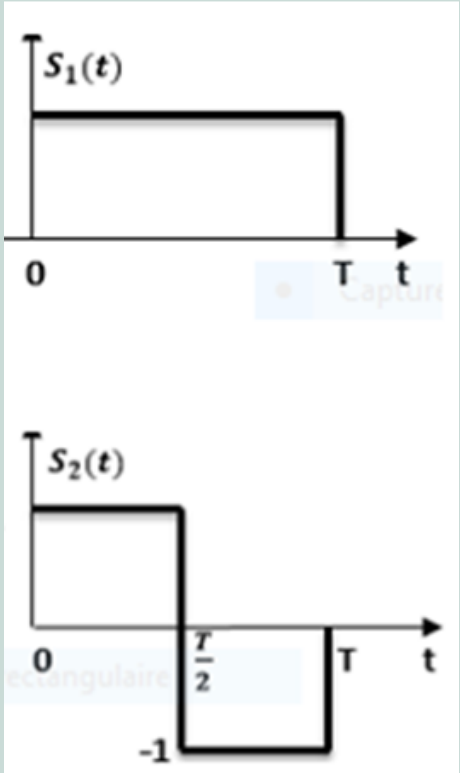
Exercices corrigés

Considérons les 4 signaux suivants.



Exercice n°1

Calcul de la distance entre les signaux $S_1(t)$ et $S_2(t)$ ci-dessous :



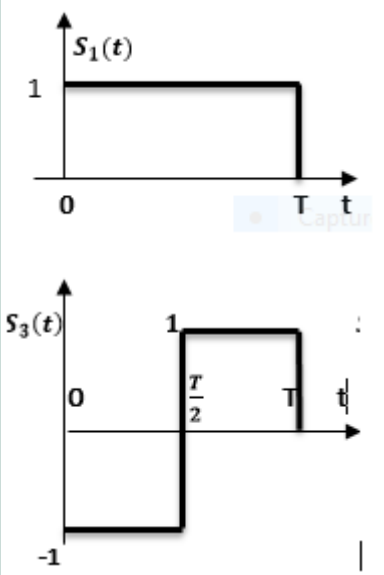
$$d[S_1(t), S_2(t)] = \sqrt{\int_0^T |S_1(t) - S_2(t)|^2 dt}$$

$$= \sqrt{\int_0^{\frac{T}{2}} |S_1(t) - S_2(t)|^2 dt} + \sqrt{\int_{\frac{T}{2}}^{T} |S_1(t) - S_2(t)|^2 dt}$$

$$\sqrt{\int_0^{\frac{T}{2}} |S_1(t) - S_2(t)|^2 dt} = 0 \text{ , et } \sqrt{\int_{\frac{T}{2}}^{T} |S_1(t) - S_2(t)|^2 dt} = \sqrt{\int_{\frac{T}{2}}^{T} 2^2 dt} = \sqrt{\int_{\frac{T}{2}}^{T} 4\, dt} = \sqrt{2T}$$

Exercice n° 2

Calculons la distance entre les signaux $S_1(t)$ et $S_3(t)$



$$d[S_1(t), S_3(t)] = \sqrt{\int_0^{T} |S_1(t) - S_3(t)|^2 \; dt}$$

$$= \sqrt{\int_0^{\frac{T}{2}} |S_1(t) - S_3(t)|^2 dt} + \sqrt{\int_{\frac{T}{2}}^{T} |S_1(t) - S_2(t)|^2 dt}$$

$$\sqrt{\int_0^{\frac{T}{2}} |S_1(t) - S_3(t)|^2 dt} = \sqrt{\int_0^{\frac{T}{2}} 2^2 dt} = \sqrt{\int_0^{\frac{T}{2}} 4.\, dt} == \sqrt{2T}$$

$$\sqrt{\int_{\frac{T}{2}}^{T} |S_1(t) - S_2(t)|^2 dt} = 0$$

$$d[S_1(t), S_3(t)] = \sqrt{2T}$$

Devoir

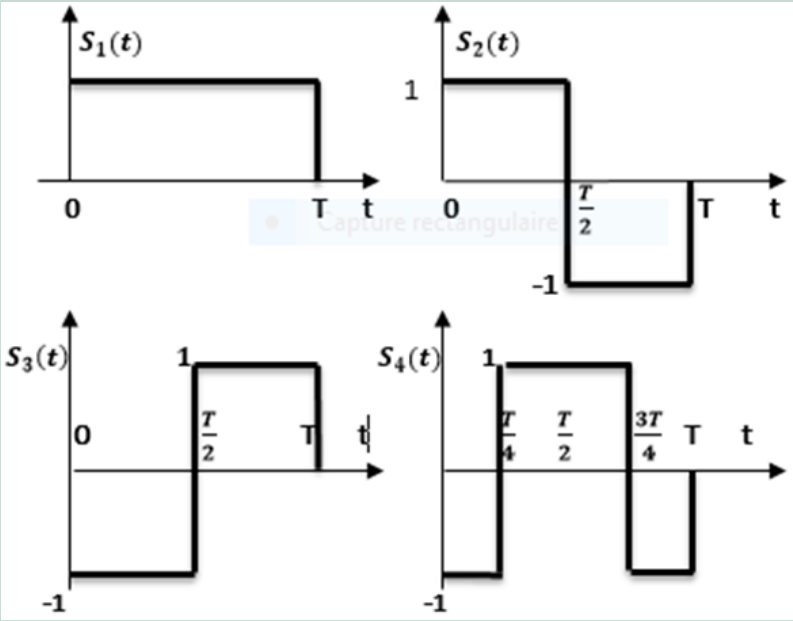
Calculer la distance entre les signaux suivants :

$d[S_3(t), S_4(t)]$

$d[S_2(t), S_3(t)]$

$d[S_2(t), S_4(t)]$

$d[S_1(t), S_4(t)]$



Rappel sur les fonctions complexes

Il est important de rappeler que l'on utilise le plus fréquemment les nombres complexes. En traitement du signal, la description mathématique la plus générale d'un signal déterministe sera:

$S(t) = a(t) + jb(t)$, $\boldsymbol{a(t)}$ et $\boldsymbol{b(t)}$ sont des réels

On sait que :

$$S(t).S^*(t) = [a(t) + jb(t)][a(t) - jb(t)] = a^2(t) - j^2 . b^2(t) = a^2(t) + b^2(t)$$

La notion de | | correspond au module, car les signaux sont souvent complexes

Remarque importante :

$|S(t)|^2$ Signifie $S_1(t).S_1^*(t)$

$S^*(t) = a(t) - j\, b(t)$, le conjugué de $S(t)$

Limite d'une fonction complexe

Considérons deux signaux réels $S_1(t)$ et $S_2(t)$ tels que :

$Y(t) = S_1(t) + jS_2(t)$, on a:

$$\lim_{t \to t_0} Y(t) = a + jb$$

$$\lim_{t \to t_0} S_1(t) = a \quad , \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} S_2(t) = b$$

Dérivation d'une fonction complexe

L'opération de dérivation est :

$$\lim_{t \to t_0} \frac{Y(t) - Y(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{S_1(t) - S_1(t_0)}{t - t_0} + j \lim_{t \to t_0} \frac{S_2(t) - S_2(t_0)}{t - t_0}$$

Soit : $Y'(t_0) = S_1{}'(t_0) + j\, S_2{}'(t_0)$

Formules usuelles de calcul des dérivées

Si on suppose que $S_1(t)$ et $S_2(t)$ sont des signaux (ou fonctions holomorphes), on a :

$$[S_1(t) + S_2(t)]' = [S_1(t)]' + [S_2(t)]'$$

$$[\lambda S_1(t)]' = \lambda [S_1(t)]'$$

$$[S_1(t) . S_2(t)]' = [S_1(t)]' . S_2(t) + S_1(t) . [S_2(t)]'$$

$$\left[\frac{S_1(t)}{S_2(t)}\right]' = \frac{[S_1(t)]' \,.\, S_2(t) - S_1(t) \,.\, [S_2(t)]'}{[S_2(t)]^2}$$

$$\left[\frac{1}{S(t)}\right]' = -\frac{[S(t)]'}{[S(t)]^2}$$

$$\{[S(t)]^n\}\}' = [nS(t)]^{n-1} \,.\, [S(t)]'$$

Exemple de calcul

Soit un signal complexe $S(t) = e^{zt}$, avec $Z = a + jb$

$$[S(t)]' = [e^{zt}]' = [e^{(a+jb)t}]' = [e^{at} \,.\, e^{jbt}]' = [e^{at} \,.\, (cosbt + j\, sinbt)]' =$$

$$a.\, e^{at}\,(cosbt + j\, sinbt) + b.\, e^{at}\,(jcosbt - sinbt) =$$

$$(a + j\, b)\,[e^{at} \,.\, (cosbt + j\, sinbt)] = Z \,.\, e^{zt}$$

Intégration d'une fonction complexe

Dans le cas d'une intégration de fonctions complexes, on a :

$$Y(t) = S_1(t) + jS_2(t)$$

$$\int Y(t)\,\mathrm{dt} = \int S_1(t)\mathrm{dt} + j\int S_2(t)\mathrm{dt}$$

Inversion temporelle

L'inversion temporelle du signal $S(t)$ correspond à la version symétrisée du signal par rapport à l'axe des ordonnées c'est à dire réaliser une image miroir du signal autour de l'origine, soit $S(t) = S(-t)$, fig.9

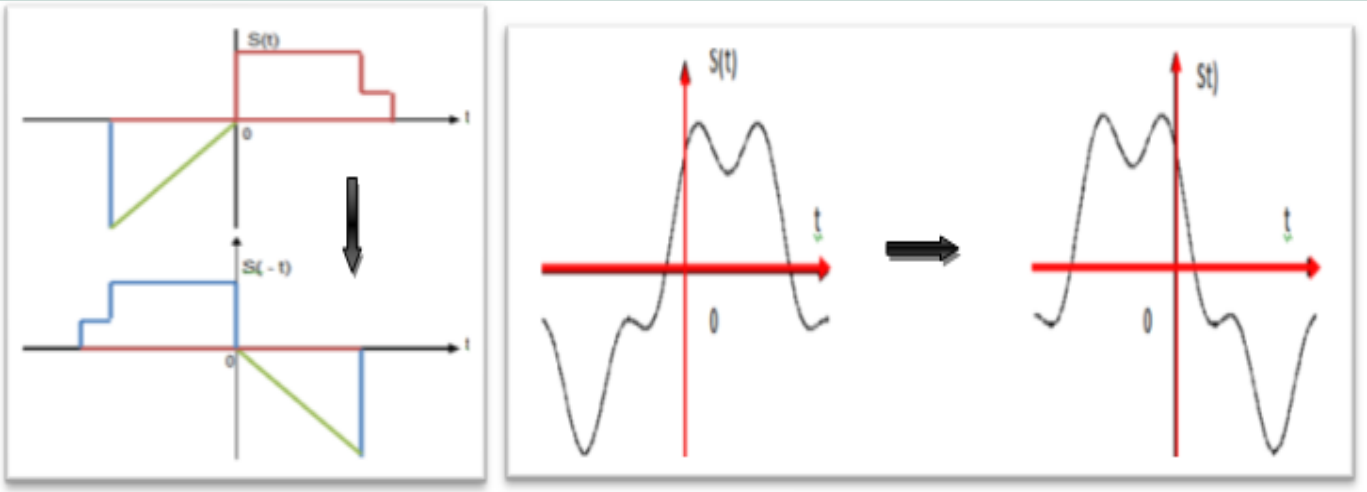


Fig9 : Exemple d'inversion temporelle

Le tableau 1 Résume les différentes opérations d'inversion sur les signaux ayant pour exemple la fonction Heaviside.

La fonction de Heaviside $\boldsymbol{H(t)}$ (échelon unité) est définie par :

$$\mathbf{H(t)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{t} \geq 0 \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{t} < \mathbf{0} \end{cases}$$

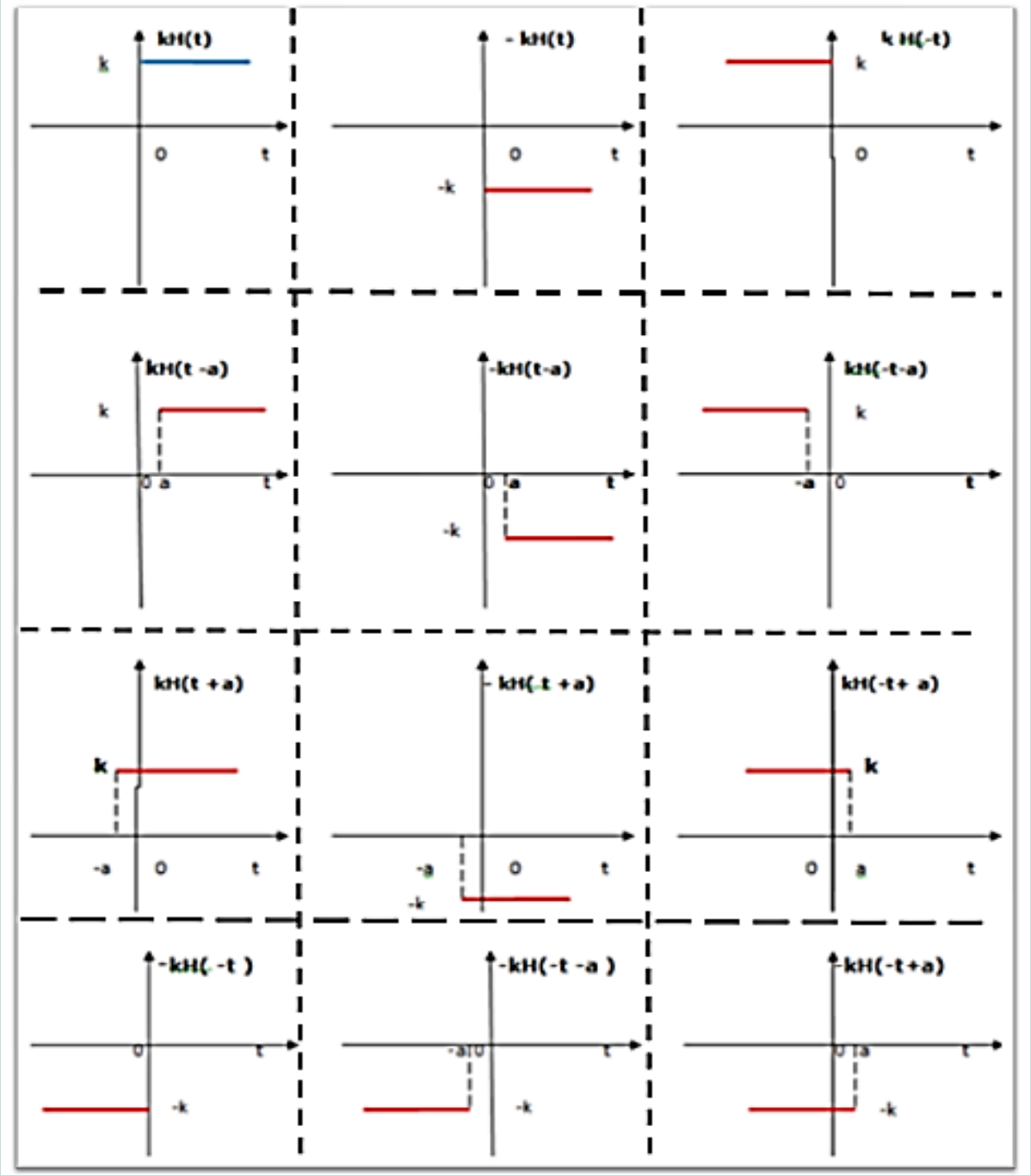


Tableau 1 : Résumé sur les différentes opérations de base sur les signaux.

CAUSALITE DES SIGNAUX ANALOGIQUES

La propriété de la causalité est très utile, car elle permet de modéliser le fait qu'un signal possède un début pris par convention comme étant l'instant $\mathbf{0}$.
La causalité des signaux conduit la décomposition d'un signal en deux éléments

Signal causal

Un signal analogique causal $S(t)$ est un signal qui débute à une date $t = 0$. Plus précisément $S(t)$ est dit signal causal si $S(t) = \mathbf{0}$ pour $t < 0$. La notion de causalité viendra notamment de l'origine des temps pris pour référence. fig.10.

La causalité d'un signal revient à multiplier le signal par la fonction échelon $H(t)$ soit :

$$S(t)\,.\,H(t) = S_{causal}\,(t) \quad = \quad \begin{cases} S(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Signal anti-causal

L'anti - causalité d'un signal revient à multiplier le signal par la fonction échelon unité $H(-t)$, soit :

$$S(t).\,H(-t) = S_{Anti\ causal}\,(t) \quad = \quad \begin{cases} S(t) & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

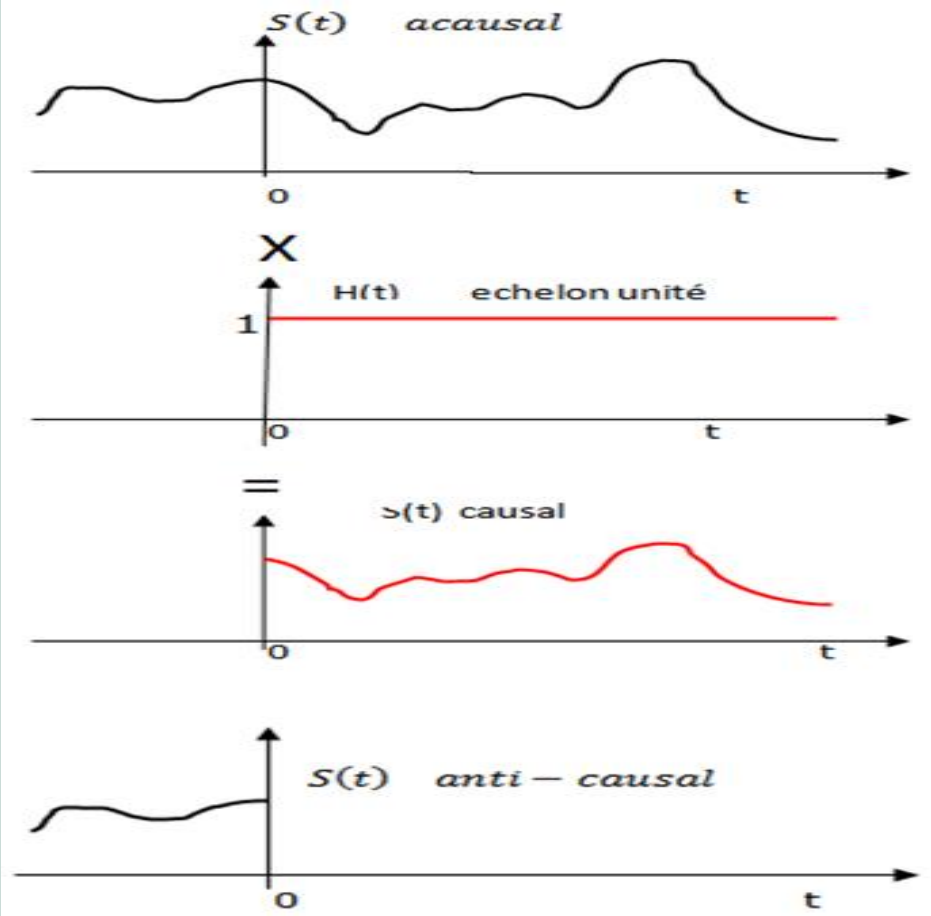


fig. 10 : causalité des signaux analogiques

Changement d'échelle temporelle

Considérons le cas d'un signal $S(t)$ dont on désire changer d'échelle des temps c'est-à-dire $S(a.t)$ avec $a > 0$ ($a$est appelé facteur d'échelle) fig.11.Deux cas se présentent :

1er cas: $0 < a < 1$: c'est le cas dilaté de s(t) : exemple $S(2/t)$
2eme cas: $a > 1$, c'est la version comprimée de s(t) : exemple $S(2t)$

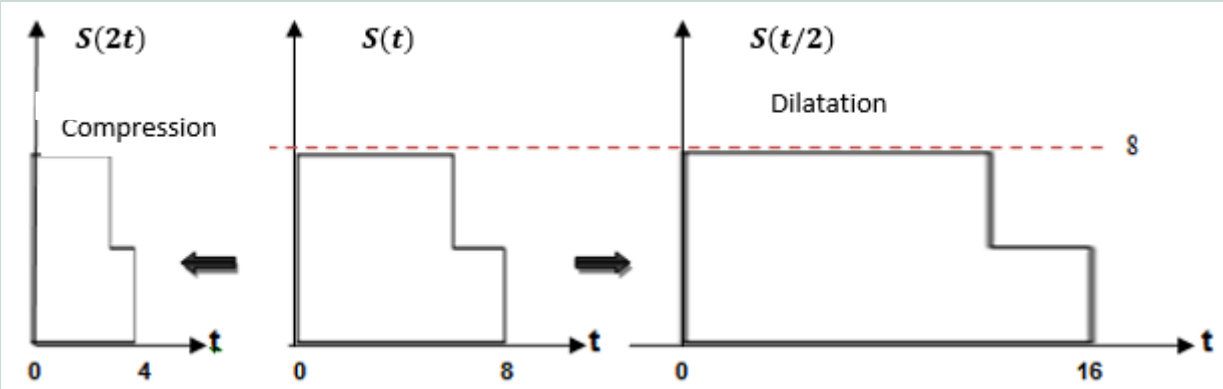


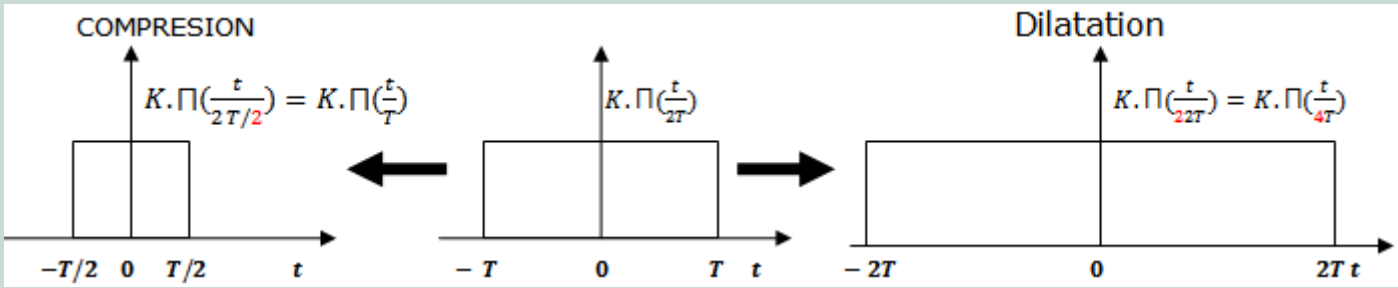
FIG.11 : illustration de l'effet d'un changement d'échelle d'un signal dans le domaine temporel

Exercice

Soit la fonction porte définie par :

$$K.\Pi\left(\frac{t}{2T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Faire les schémas de changement de facteur d'échelle pour $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$ et $\boldsymbol{a} = \mathbf{1/2}$



DEVOIR

Soit donné un signal $\boldsymbol{S(t)}$ triangulaire suivant :

$$S(t) = \begin{cases} 1+t & \text{pour} \quad -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représenter le signal triangulaire et les différentes transformations suivantes :

$\boldsymbol{S(2t)}$,
$\boldsymbol{S(2t+2)}$,
$\boldsymbol{S(-2t-2)}$,
$\boldsymbol{S[2(t-2)]}$,
$\boldsymbol{S(3t)}$,
$\boldsymbol{S[2(t+2)]}$,
$\boldsymbol{S(2t)+S(2t+2)}$

Formules trigonométriques

Voici une synthèse des formules les plus fréquemment rencontrées qui conduisent de se ramener à des expressions plus simples et plus pratiques dans les problèmes rencontrés en traitement du signal.

$e^{i\beta} = \boldsymbol{cos\beta + i.sin\beta}$
$e^{-i\beta} = \boldsymbol{cos\beta - i.sin\beta}$
$\boldsymbol{sin\beta} = \frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i}$
$\boldsymbol{cos\beta} = \frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2}$, avec $i^2 = -1$
$1+e^{i\beta} = 2\boldsymbol{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{2}\right)e^{i\frac{\beta}{2}}$
$1-e^{i\beta} = -2i\boldsymbol{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{2}\right)e^{i\frac{\beta}{2}}$
$e^{i\beta} + e^{i\alpha} = 2\boldsymbol{cos}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i(\frac{\beta+\alpha}{2})}$
$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i\boldsymbol{sin}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i(\frac{\beta+\alpha}{2})}$
$\boldsymbol{\sin 2\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}}$
$\boldsymbol{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}}$
$\boldsymbol{\cos^2\beta = \frac{1}{2}(1+cos2\beta)}$
$\boldsymbol{\sin^2\beta = \frac{1}{2}(1-cos2\beta)}$
$\boldsymbol{2\cos\alpha.\cos\beta = \cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}$
$\boldsymbol{2\cos\alpha.\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$
$\boldsymbol{2\sin\alpha.\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$
$\boldsymbol{2\sin\alpha.\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)}$
$\boldsymbol{sin\alpha+sin\beta = 2\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}}$
$\boldsymbol{cos\alpha+cos\beta = -2\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}}$

$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha}\cos\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\sin}\beta\sin\boldsymbol{\alpha}$

$\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha}\cos\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\sin}\beta\sin\boldsymbol{\alpha}$

$\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha}\cos\beta - \boldsymbol{\sin}\beta\cos\boldsymbol{\alpha}$

$\sin(\alpha+\beta) \quad = \sin\beta \ \cos\alpha + \sin\alpha \ \cos\beta$

$cos\alpha - cos\beta \quad = -2 \ \sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta)}{2}$

$sin\alpha + sin\beta \quad = 2 \ \sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}$

$sin\alpha - sin\beta \quad = 2 \ \sin\frac{(\alpha-\beta)}{2}\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}$

$cos\alpha + cos\beta \quad = 2 \ \cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}$

$\int Adt = At + c$

$\int tdt = \frac{t^2}{2} + c$

$\int t^m dt = \frac{t^{m+1}}{m+1} + c$ (m≠ -1)

$\int \frac{1}{t} dt = \log|t| + c$

$\int e^{-at} dt = -\frac{1}{a} e^{-at} + c$

$\int sin\beta dt = -cos\beta + c$

$\int cos\beta dt = sin\beta + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 t} dt = tgt + c \quad = \int (1 + \mathrm{tg}^2 t) \ dt \ t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in Z$

$\int \frac{1}{\sin^2 t} dt = -cotan\, t + c$

$\int \cos^2 \beta \, dt = \frac{t}{2} + \frac{sin2\beta}{4} + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = arc\, sint + c$

$\int \frac{1}{1+t^2} dt = arc\, tg\, t + c$

$\int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + c \ t \neq 0$

$\int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \sqrt{t} + c \ t \neq 0$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(u+v)' = (u)' + (v)'$

$(u.v)' = v(u)' + u(v)'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v(u)' - u(v)'}{v^2}$

$(A\,u)' = A(\,u)'$

$(t^m)' = mt^{m-1}$, Pour$(m \geq 2)$

$(e^{a.m})' = a.e^{a.m}$

$\left(e^{j\beta}\right)^n = e^{jn\beta}$

$(\cos\beta + \mathrm{j}\sin\beta)^n = \cos n\beta + \mathrm{j}\sin n\beta$

Signaux périodiques

Un signal est dit périodique s'il se répète identique à lui-même par intervalle de temps régulier. Les phénomènes périodiques sont nombreux (ex : rythme cardiaque, rythme respiratoire, activité cérébrale, levers et couchers du soleil, les saisons etc.)
Tout signal est dit périodique de période T si l'on a $S(t) = S(t+T)$ pour toute valeur de T. Il est également périodique de période nT , avec n entier.La période est définie comme la plus petite valeur de T qui satisfait à $S(t) = S(t+T)$, autrement lorsque $n = 1$

Les caractéristiques d'un signal périodique sont :

- **Sa période** : La période T d'un signal périodique est la durée qui sépare deux évènements identiques successifs.

- **Sa fréquence** : La fréquence d'un signal périodique correspond au nombre de périodes par unité de temps $f = \frac{1}{T}$, l'unité en système international est le Hertz(Hz), $1Hz = 1S^{-1}$
  Tout signal périodique de période T présente une fréquence fondamentale à la fréquence $f = 1/T$.

- **Son amplitude maximale** : L'amplitude maximale A_{max} d'un signal périodique est la plus grande valeur prise par ce signal

- **Son amplitude minimale** : L'amplitude minimale A_{min} d'un signal périodique est la plus petite valeur d'amplitude prise par ce signal.

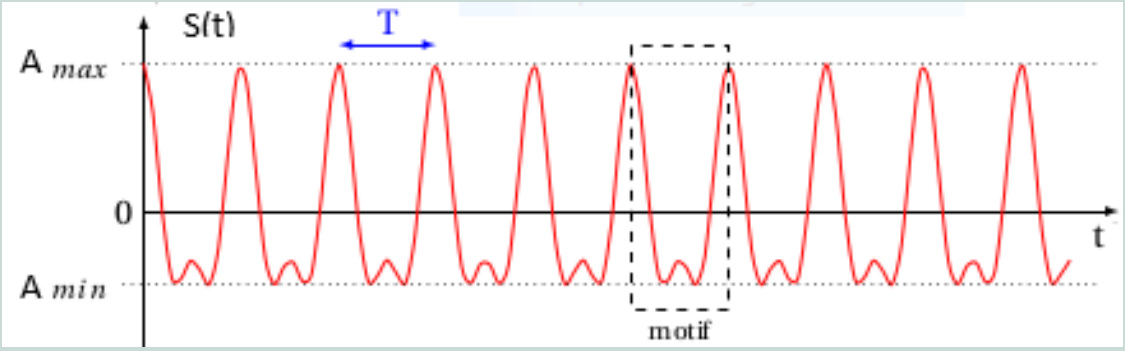
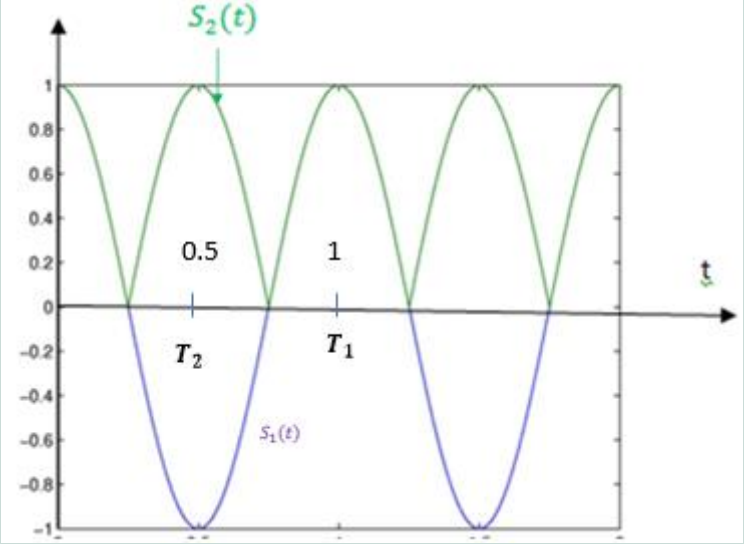


Fig.12 : exemple d'un signal périodique

Exercice n° 1

On considère deux signaux $S_1(t) = \cos 2\pi t$ et $S_2(t) = |\cos 2\pi t|$
Tracez ces deux signaux sur un graphique$t \in [0.2]$. Quelle est la période de $S_1(t)$ et $S_2(t)$.



Calcul de la période et de la fréquence .On a :
$\cos 2\pi t = cos\omega t$, $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T_1} f = 1$,$T_1 = 1$

En effet, on a $S_1(t+1) = (2\pi t + 2\pi) = cos2\pi(t+1) = S_1(t)$
Le graphe montre que la période T_2 du signal $S_2(t)$ est égale à $½T_1$ avec

$\frac{T_2}{T_1} = ½$

Car, c'est une sinusoïde transposée d'une demi –période et en opposition de phase.

Exercice n° 2

Soit $S(t) = cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right).sin(\frac{\pi}{3}t)$

Trouver les périodes T_1 et T_2 et la période T du signal global $s(t)$

$S(t) = S_1(t).S_2(t)$

Le signal $S_1(t)$ possède une période :

$\omega_1 = 2\pi\frac{1}{T_1} = \frac{2\pi}{5}$, Soit $T_1 = 5$

Le signal $S_2(t)$ possède une période :

$\omega_2 = 2\pi\frac{1}{T_2} = \frac{\pi}{3}$, soit $T_2 = 6$

Le signal global $s(t)$ possède une période :

Comme le plus petit commun multiple(PPCM) est 30 des périodes $T_1 = 5$ et $T_2 = 6$ .Il s'en suit que le signal global $s(t)$ est un signal périodique et de période T =30

Exercice n° 4

Soit $s(t) = S_1(t)+S_2(t)$

Avec $S_1(t) = cos\omega_1 t = cos\left(\frac{3\pi}{\sqrt{3}}t\right)$ et $S_2(t) = sin\omega_2 t = sin(3\pi t + \frac{\pi}{6})$

La période de $S_1(t)$ est :

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{3\pi}{\sqrt{3}}$, $T_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

La période de $S_2(t)$ $est:$

$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = 3\pi$, $T_2 = \frac{2}{3}$. On a:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{3} \quad , \quad T_1 = T_2\sqrt{3}$$

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m}$, tel que m et n appartiennent à $\in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, .Dans notre cas, on a

$T_1 = T_2\sqrt{3} = T$. En conclusion le signal s(t) est un signal qui n'est pas périodique car $T_1 \notin \mathbb{N}$ et $T_1 \notin \mathbb{Z}$

Signaux sinusoïdaux et exponentielles complexes

Soit un signal complexe : $Y(t) = A.\cos(\omega_0 t + \varphi) + j.A.\sin(2\pi f_0 t + \varphi)$

$$A\cos(\omega_0 t + \varphi) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$A\sin(\omega_0 t + \varphi) = A\sin(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2}\left[e^{2\pi j f_0 t}e^{j\varphi} + e^{-2\pi j f_0 t}e^{-j\varphi}\right] = \frac{A}{2}.\mathbb{R}\left[e^{2\pi j f_0 t}e^{j\varphi}\right]$$

$$A\sin(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2j}\left[e^{2\pi j f_0 t}e^{j\varphi} - e^{-2\pi j f_0 t}e^{-j\varphi}\right] = \frac{A}{2j}.\mathfrak{Im}\left[e^{2\pi j f_0 t}e^{j\varphi}\right]$$

Signaux réels et complexes

Signal réel

Un signal $S(t)$ est dit réel s'il est défini sur l'ensemble des nombres réels, autrement dit quand $s(t) \in \mathbb{R}$
Un signal $s(t)$ est dit réalisable lorsqu'il est à la fois stable et causal. Les signaux réels ont une existence réelle .Tout signal $S(t)$ réel possède les caractéristiques suivantes :
- Energie bornée,
- amplitude bornée
- Continu temporellement
- Causal c'est à dire $S(t)$ si $t < 0$ et $S(t) \neq 0$ si $t > 0$

Le signal $S(t) = A \cos 2\pi f t$, A étant réel, le signal est lui-même réel

Signal complexe

Un signal $S(t)$ est dit complexe si il prend des valeurs complexes, autrement dit quand $S(t) \in \mathbb{C}$

Le signal $S(t) = A\,[\cos(2\pi f t + \varphi) + j\,\sin(2\pi f t + \varphi)] = A.e^{j(2\pi f t + \varphi)}$ est un signal complexe
$A\cos(\omega t + \varphi)$: La partie réelle
$A\sin(\omega t + \varphi)$: La partie imaginaire

Le module

Le Module du signal est :

$$|S(t)| = \sqrt{R_e^2[s(t)] + I_m^2[s(t)]} = \sqrt{\left[\frac{A}{2}cos(\omega t + \varphi)\right]^2 + \left[\frac{A}{2}sin(\omega t + \varphi)\right]^2}$$

$$= \frac{A}{2}\sqrt{[cos(\omega t + \varphi)]^2 + [sin(\omega t + \varphi)]^2} = \frac{A}{2}$$

La phase

La phase est définie par la relation :

Comme

$$\alpha = (2\pi f t + \varphi) = arctan\frac{\text{partie imaginaire}}{\text{partie réelle}} = arctan\frac{\frac{A}{2}sin(\omega t + \varphi)}{\frac{A}{2}cos(\omega t + \varphi)} =$$

$$arctan[\tan(\omega t + \varphi)] = arctan[\tan\alpha]$$

D'où finalement

$$\boldsymbol{S(t)} = \frac{A}{2}\boldsymbol{e^{j(2\pi f t+\varphi)}} = |\boldsymbol{S(t)}| \,.\, \boldsymbol{e^{j\alpha}} = \frac{A}{2}\,.\,\boldsymbol{e^{j\alpha}}$$

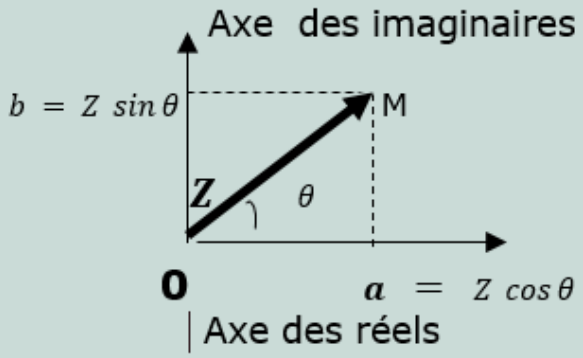
Représentation d'un signal

Soit un signal complexe :

$\boldsymbol{S(t)} = \boldsymbol{a(t)} + \boldsymbol{jb(t)}$, $\boldsymbol{a(t)}$ et $\boldsymbol{b(t)}$ sont des réels

Sa représentation vectorielle $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ permet d'illustrer ses propriétés

1- Représentation cartésienne



Cas de deux signaux réels

Soient deux signaux $\boldsymbol{S_1(t)}$ et $\boldsymbol{S_2(t)}$ réels, leur produit donne :

Le module

$|S_1(t).S_2(t)| = |S_1(t)||S_2(t)|$

L'argument

En vertu de l'expression $S(t) = |\boldsymbol{S(t)}| \,.\, \boldsymbol{e^{j\alpha}}$

$S_1(t) = |S_1(t)| \,.\, \boldsymbol{e^{j\alpha_1}}$

$S_2(t) = |S_2(t)| \,.\, \boldsymbol{e^{j\alpha_2}}$

$\boldsymbol{S_1(t).S_2(t)} = |S_1(t).S_2(t)| = |S_1(t)||S_2(t)|\boldsymbol{e^{j\alpha_1}}.\boldsymbol{e^{j\alpha_2}} = |S_1(t)||S_2(t)|\boldsymbol{e^{j(\alpha_1+\alpha_2)}}$, d'où

$\boldsymbol{\alpha}[S_1(t).S_2(t)] = \boldsymbol{\alpha}[S_1(t)] + \boldsymbol{\alpha}[S_2(t)] = \boldsymbol{\alpha_1} + \boldsymbol{\alpha_2}$

Cas de deux signaux complexes

Si $\boldsymbol{S(t)} = a(t) + jb(t)$ et son conjugué $\boldsymbol{S^*(t)} = \boldsymbol{a(t)} - \boldsymbol{jb(t)}$ **,** on a :

Le module

$|S(t).\boldsymbol{S^*(t)}| = |S(t)||\boldsymbol{S^*(t)}|$
$|\boldsymbol{S(t)}|^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{S(t)}.\boldsymbol{S^*(t)}$

L'argument

$\boldsymbol{\varphi}[S(t)] = -\boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{S^*(t)}]$